ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

BOHUSLAV SIVÁK, Banská Bystrica

Úloha 1. Nájdite všetky celočíselné riešenia sústavy

$$6x^2+7xy+8x+y=3y^2+128, \quad x\geqslant 0, y\geqslant 0$$

Riešenie: Najprv danú rovnicu upravíme:

$$6x^2+7xy-3y^2+8x+y=128$$

Všimnime si v polynóme na ľavej strane členy 2. stupňa. Ľahko sa dá nájsť rozklad

$$6x^2+7xy-3y^2=(2x+3y).(3x-y)$$

Hľadajme také čísla a, b, c, aby platilo

$$(2x+3y+a).(3x-y+b)=6x^2+7xy-3y^2+8x+y+c$$

Po roznásobení členy 2. stupňa vypadnú a ostane

$$x.(3a+2b)+y.(3b-a)+ab=8x+y+c$$

Porovnaním koeficientov dostaneme sústavu rovníc

$$3a+2b=8$$

$$3b-a=1$$

$$ab=c$$

Jej jediné riešenie je $a=2$, $b=1$, $c=2$. To znamená, že danú rovnicu možno písať v tvare

$$(2x+3y+2).(3x-y+1)=130$$

Označme $2x+3y+2=p$, $3x-y+1=q$. Potom p, q sú celé čísla a platí $p.q=130$. Ďalej zrejme $p>0$, a teda aj $q>0$. Ak vyjadríme x, y pomocou p, q dostaneme

$$x=\frac{p+3q-5}{11}$$

$$y=\frac{3p-2q-4}{11}$$

To znamená, že jednak $p>\frac{2q}{3}$, jednak číslo $p+3q-5$ musí byť deliteľné číslom 11. Do úvahy teda prichádzajú len tieto možnosti:

$p=130$, $q=1$, $p+3q-5=128$ ...... nie je deliteľné 11-mi
$p=65$, $q=2$, $p+3q-5=66$ ...... $x=6$, $y=17$
$p=26$, $q=5$, $p+3q-5=36$ ...... nie je deliteľné 11-mi
$p=13$, $q=10$, $p+3q-5=38$ ...... nie je deliteľné 11-mi
$p=10$, $q=13$, $p+3q-5=44$ ...... $x=4$, $y=0$

Záver: daná sústava má dve celočíselné riešenia, a to:

$$x_1=6,\ y_1=17 \text{ a } x_2=4,\ y_2=0$$

Úloha 2. Nájdite všetky celočíselné riešenia sústavy

$$x^3+y^3+z^3=3.(xyz+9)\quad x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$$

Riešenie: Využijeme rovnosť

$$(x+y+z).(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

pomocou nej zapíšeme danú rovnicu v tvare

$$(x+y+z).(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=27$$

Označme $x+y+z=s$, potom na základe identity

$$s^2-3.(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$$

dostaneme

$$s^3-3s.(xy+xz+yz)=27$$

Z toho je zrejmé, že s je deliteľ čísla 27 a zároveň $s\geqslant 3$. Sú teda tri možnosti:

a) $s=3$, potom máme sústavu

$$x+y+z=3$$

$$xy+xz+yz=0$$

Ak $z\neq 0$, zrejme druhá rovnica nemôže byť splnená, lebo potom x, y, z sú kladné čísla. Preto $z=0$ a pre x, y máme sústavu

$$x+y=3$$

$$xy=0$$

Pretože $x\geqslant y$, nevyhnutne $x=3$, $y=0$

b) $s=9$, potom máme sústavu

$$x+y+z=9$$

$$xy+xz+yz=26$$

odkiaľ dostaneme

$$x^2+y^2+z^2=s^2-2.(xy+xz+yz)=81-52=29$$

Pre x, y teda máme sústavu rovníc

$$x+y=9-z$$

$$x^2+y^2=29-z^2$$

Potom

$$(x-y)^2=2.(x^2+y^2)-(x+y)^2=58-2z^2-(9-z)^2=-3z^2+18z-23$$

Číslo $-3z^2+18z-23$ teda musí byť úplný štvorec. Pretože $3z\leqslant s=9$, je $z\in\{0, 1, 2, 3\}$ a priamym dosadením zistíme, že vyhovuje len $z=2$, $z=3$. Pre $z=2$ dostaneme $x+y=7$, $(x-y)^2=1$, teda $x=4$, $y=3$. Pre $z=3$ je $x+y=6$, $(x-y)^2=4$, čo je spor s podmienkou $x\geqslant y\geqslant z$.

c) $s=27$, potom

$$27^3-81.(xy+xz+yz)=27$$

čo nie je možné, lebo ľavá strana je deliteľná číslom 81, ale pravá strana nie.

Záver: daná sústava má dve celočíselné riešenia, a to

$$x_1=3,\ y_1=z_1=0 \ \text{ a } \ x_2=4,\ y_2=3,\ z_2=2$$

Obe úlohy sú vybrané z 2. ročníka stredoslovenského krajského korešpondenčného seminára matematickej olympiády. Druhú sériu úloh na tému diofantické rovnice zostavil *B. Sivák*.

Rubriku vedie Bohuslav Sivák, Katedra matematiky Pedagogickej fakulty, Tajovského 40, 975 49 Banská Bystrica. Nové úlohy s riešeniami posielajte na jeho adresu.