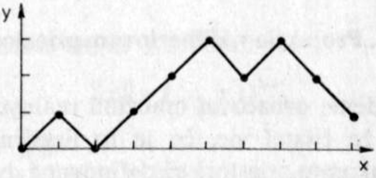
MATEMATICKÉ OBZORY 16/1980

PREDPOVEDANIE POMOCOU KOLMÍC V HILBERTOVÝCH PRIESTOROCH

ANDREJ PÁZMAN, Bratislava

1. Úvod

Existujú nie veľmi zodpovední ľudia, ktorí tvrdia, že možno hádať a predpovedať pomocou krištáľovej gule alebo pomocou karát. Skutočnosť je však úplne iná. Správne predpovedať a odhadovať sa má pomocou kolmíc v Hilbertových priestoroch. Cieľom článku je presvedčiť o tom aj toho najskeptickejšieho čitateľa.



Obr. 1

Príklad 1. Po poli kľučkuje zajac spôsobom naznačeným na *obr. 1.* Pri každom skoku sa zajac posunie o konštantný úsek pozdĺž osi x v smere $+x$ a súčasne sa posunie o rovnako veľký úsek rovnobežne s osou y v smeroch $+y$ alebo $-y$. Skoky sú náhodné, konštantnej dĺžky, pričom výber smeru skoku sa riadi týmto pravidlom:

Ak v skokoch $n-k$, $n-k+1, \ldots, n-1$ zajac nezmenil smer, ale zmenil smer v $(n-k-1)$-om skoku, tak s pravdepodobnosťou $(k+1)/(k+2)$ zmení smer v n-tom skoku. Pri prvom skoku zajac s rovnakou pravdepodobnosťou skočí v smere $+y$ alebo v smere $-y$.

Treba predpovedať polohu zajaca po $n+i$ skokoch, ak priebeh skokov $1, \ldots, n$ je známy.

Príklad 2. Z veže výšky h sa vo vodorovnom smere hodí kameň so začiatočnou rýchlosťou v. Máme predpovedať, kam dopadne kameň, ak nepoznáme ani rýchlosť v ani gravitačné zrýchlenie voľného pádu. Predpoveď má byť založená na odhadoch polohy padajúceho kameňa v piatich časových okamihoch $t_1, \ldots, t_5$ počas letu kameňa.

Tieto ilustračné príklady sú elementárne. Charakterizujú však dve skupiny úloh, v ktorých sa predpoveď, resp. odhad určuje pomocou projekcií (t.j. kolmíc) v Hilbertových priestoroch, tak ako to ukážeme ďalej. V prvej skupine predpoveď je založená na výpočte podmienenej pravdepodobnosti alebo podmienenej strednej hodnoty. Ukážeme, že podmienená pravdepodobnosť a podmienená stredná hodnota sú určené projekciami v Hilbertovom priestore náhodných veličín, ktorých disperzie sú konečné. V druhej skupine predpoveď je založená na odhade neznámych parametrov charakterizujúcich priebeh nejakého procesu (v našom prípade pádu kameňa). Takéto odhady určíme opäť pomocou projekcií vo vhodne zvolenom Hilbertovom priestore.

2. Projekcia v Hilbertovom priestore

Symbolom R budeme označovať množinu reálnych čísel.

Predpokladáme, že čitateľ vie, čo je to lineárny (resp. vektorový) priestor nad R. V takomto priestore sú definované dve operácie, operácia sčítania a operácia násobenia skalárom (pozri [1]).

Ak v lineárnom priestore L každej dvojici $(x, y) \in L \times L$ priradíme reálne číslo $\langle x, y \rangle$ tak, aby platilo:

a) $$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle; \quad (x, y \in L), \tag{1}$$

b) $$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle; \quad (\alpha, \beta \in R, x, y, z \in L), \tag{2}$$

c) pre každé $x \in L$ je $\langle x, x \rangle \geqq 0$, pričom $\langle x, x \rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$, tak hovoríme, že L je lineárny priestor so skalárnym súčinom $\langle x, y \rangle$.

Tvrdenie 1 (Schwarzova nerovnosť).
Nech L je lineárny priestor so skalárnym súčinom $\langle x, y \rangle$. Potom platí:

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leqq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle; \quad (x, y \in L), \tag{3}$$

pričom rovnosť v (3) je práve vtedy, keď existujú $\alpha, \beta \in R$, aspoň jedno rôzne od nuly, také, že $\alpha x + \beta y = 0$.

Dôkaz. Nech $x \neq 0$. Z vlastností a), b), c), skalárneho súčinu vyplýva:

$$0 \leqq \langle \{y - (\langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle) x\}, \{y - (\langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle) x\} \rangle =$$
$$= \langle y, y \rangle - (\langle x, y \rangle)^2 / \langle x, x \rangle$$

pričom rovnosť je práve vtedy, keď

$$y = (\langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle) x$$

Teda

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leqq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

pričom rovnosť je práve vtedy, keď $y = \alpha x$ pre nejaké $\alpha \in R$.

Ak $x = 0$, $y \neq 0$, zameníme v dôkaze x za y. Ak $x = y = 0$, tvrdenie je triviálne. □

Cvičenie 1. Presvedčte sa, že vzťahom

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} \tag{4}$$

je definovaná norma $\| \ \|$ v H.

Návod. Dokážte: a) $\|x\| \geqq 0$; b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; d) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$. Pri dôkaze poslednej nerovnosti použite Schwarzovu nerovnosť.

Definícia 1. Hilbertov priestor je lineárny priestor H so skalárnym súčinom $\langle x, y \rangle$, ktorý je úplný, t. j. platí: ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov H je cauchyovská, t. j. ak

$$\lim_{m, n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

tak existuje $x \in H$, že $\quad \lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$

Poznámka. Vzťah $\quad \lim_{m, n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$

Tvrdenie 1 (Schwarzova nerovnosť).

Nech L je lineárny priestor so skalárnym súčinom $\langle x, y \rangle$. Potom platí:

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leqq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle; \quad (x, y \in L), \tag{3}$$

pričom rovnosť v (3) je práve vtedy, keď existujú $\alpha, \beta \in R$, aspoň jedno rôzne od nuly, také, že $\alpha x + \beta y = 0$.

Dôkaz. Nech $x \neq 0$. Z vlastností a), b), c), skalárneho súčinu vyplýva:

$$0 \leqq \langle \{y - (\langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle) x\}, \{y - (\langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle) x\} \rangle =$$
$$= \langle y, y \rangle - (\langle x, y \rangle)^2 / \langle x, x \rangle$$

pričom rovnosť je práve vtedy, keď

$$y = (\langle x, y \rangle / \langle x, x \rangle) x$$

Teda

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leqq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

pričom rovnosť je práve vtedy, keď $y = \alpha x$ pre nejaké $\alpha \in R$.

Ak $x = 0$, $y \neq 0$, zameníme v dôkaze x za y. Ak $x = y = 0$, tvrdenie je triviálne. □

Cvičenie 1. Presvedčte sa, že vzťahom

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} \tag{4}$$

je definovaná norma $\| \;\|$ v H.

Návod. Dokážte: a) $\|x\| \geqq 0$; b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; d) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$. Pri dôkaze poslednej nerovnosti použite Schwarzovu nerovnosť.

Definícia 1. Hilbertov priestor je lineárny priestor H so skalárnym súčinom $\langle x, y \rangle$, ktorý je úplný, t. j. platí: ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov H je cauchyovská, t. j. ak

$$\lim_{m, n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

tak existuje $x \in H$, že $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$

Poznámka. Vzťah $\lim_{m, n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$

chápeme takto: ku každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že pre všetky $m, n \geqq n_0$ je:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Príklad 3. Na reálnej priamke R definujeme sčítanie a násobenie skalárom obvyklým spôsobom. Definujme ďalej skalárny súčin

$$\langle x, y \rangle \equiv xy; \quad (x, y \in R) \tag{5}$$

ako zvyčajný súčin reálnych čísel. Lineárny priestor R s takto definovaným skalárnym súčinom je Hilbertov priestor. Úplnosť vyžadovaná v definícii Hilbertovho priestoru je obsahom Bolzanovho—Cauchyovho kritéria konvergencie, známeho zo základov matematickej analýzy (pozri [2], § 57). Norma v R je:

$$\|x\| \equiv |x|$$

Príklad 4 (Euklidov priestor). Nech R^m je lineárny priestor všetkých m-tíc reálnych čísel (m-rozmerných vektorov). Výraz

$$\langle x, y \rangle \equiv \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \tag{6}$$

definuje skalárny súčin na R^m. Pritom x_i je i-tá zložka vektora x. Lineárny priestor R^m s takto definovaným skalárnym súčinom je Hilbertov priestor. Vyžadovaná úplnosť vyplýva z rovnosti

$$\|x - y\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2$$

a z Bolzanovho—Cauchyho kritéria konvergencie, podobne ako v príklade 3.

Príklad 5. Nech A je matica typu $m \times m$, ktorá je symetrická a kladne definitná, t.j. pre ľubovoľné reálne čísla $c_1, \ldots, c_m$ platí:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i \{\mathbf{A}\}_{ij} c_j \geqq 0 \tag{7}$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Uvažujme opäť lineárny priestor R^m m-rozmerných vektorov. Ak $x \in R^m$ (t.j. x je stĺpcový vektor), tak symbolom x' označujeme jeho transpozíciu (riadkový vektor). Výraz

$$\langle x, y \rangle \equiv x'Ay \tag{8}$$

definuje skalárny súčin na R^m. Lineárny priestor R^m s takýmto skalárnym súčinom je Hilbertov priestor. Dôkaz úplnosti je o niečo zložitejší ako v predchádzajúcich prípadoch. Možno ho vykonať napr. tak, že maticu $\mathbf{A}$ diagonalizujeme vhodnou lineárnou transformáciou priestoru R^m, čím dostaneme skalárny súčin v takom tvare ako v príklade 4.

Dva prvky Hilbertovho priestoru x, y sú *ortogonálne* (kolmé) ak $\langle x, y \rangle = 0$.

Cvičenie 2 (Pythagorova veta). Nech $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = 0$. Dokážte, že platí:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Nakreslite vektory $x - y$, x, y na obrázku v rovine a ilustrujte, že ide skutočne o známu Pythagorovu vetu.

Triviálnosť dôkazu v cvičení 2 ešte nedokazuje, že Pythagorova veta zo strednej školy je triviálna. V strednej škole nemusíme ešte vedieť, že *obyčajný priestor* je Hilbertov priestor. (Ani Pythagoras to nevedel.)

Maximálny počet vzájomne ortogonálnych prvkov Hilbertovho priestoru určuje rozmer tohto priestoru. Dosiaľ sme uviedli len prípady konečno-rozmerných Hilbertových priestorov. Uvedieme teraz príklad nekonečne rozmerného Hilbertovho priestoru.

Príklad 6. Nech l_2 je množina všetkých postupností reálnych čísel $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ pre ktoré platí:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

Súčet a násobenie skalárom takýchto postupností definujeme obvyklým spôsobom, t. j.

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} + \{y_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}; \quad \alpha\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\alpha x_i\}_{i=1}^{\infty}$$

Skalárny súčin definujeme takto

$$\langle \{x_i\}_{i=1}^{\infty}; \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{9}$$

Množina l_2 s takto definovanými operáciami a skalárnym súčinom je

Hilbertov priestor (pozri [3], kap. III), ktorý označujeme aj l_2.

Definícia 2. Podpriestor Hilbertovho priestoru H je uzavretá podmnožina $M \subset H$ s vlastnosťou

$$x, y \in M; \quad \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$$

Cvičenie 3. Dokážte, že podpriestor Hilbertovho priestoru je Hilbertov priestor s tým istým skalárnym súčinom.

Návod: Ukážte, že úplnosť je dôsledkom uzavretosti M a úplnosti H.

Príklad 7. Uvažujme Hilbertov priestor z príkladu 4, resp. z príkladu 5. Zvoľme $y_1, \ldots, y_r \in H$. Množina

$$M = \{x \in H: \langle y_1, x \rangle = 0, \ldots, \langle y_r, x \rangle = 0\} \tag{10}$$

je lineárny podpriestor. Naopak, možno ukázať, že každý lineárny podpriestor v tomto Hilbertovom priestore má tvar (10), pri vhodne zvolených vektoroch $y_1, \ldots, y_r$.

Cvičenie 4. Presvedčte sa, že množina tých postupností patriacich do l_2 (príklad 6), ktoré majú len konečne mnoho nenulových členov, tvorí síce lineárny priestor, ale nie je uzavretá v l_2, teda nie je lineárnym podpriestorom Hilbertovho priestoru l_2.

Zo ZDŠ vieme, že z ľubovoľného bodu x v *obyčajnom* trojrozmernom priestore možno skonštruovať kolmicu na ľubovoľnú priamku alebo rovinu v priestore. Vzdialenosť medzi bodom x a pätou kolmice je najmenšia vzdialenosť bodu x od niektorého bodu na uvažovanej priamke resp. rovine.

Podobne, ak H je Hilbertov priestor a M je podpriestor v H, tak ku každému $x \in H$ existuje práve jeden bod $y_x \in M$ taký, že *vzdialenosť* medzi nimi (t. j. norma $\|x - y_x\|$) je menšia, alebo sa rovná norme $\|x - y\|$, pre každé $y \in M$. Priamka prechádzajúca bodmi x a y_x je kolmica na M.

Tvrdenie 2. Nech M je podpriestor Hilbertovho priestoru H a nech $x \in H$. Potom existuje práve jeden prvok $y_x \in M$ taký, že

$$\|x - y_x\| = \min \{\|x - y\| : y \in M\} \tag{11}$$

a platí:

$$\langle x - y_x, y \rangle = 0; \quad (y \in M) \tag{12}$$

Dôkaz. Z definície infima vyplýva, že existuje postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov množiny M taká, že

$$\lim_{k\to\infty} \|x - y_k\| = \inf \{\|x - y\| : y \in M\} \tag{13}$$

Označme δ hodnotu infima v (13). Rozpisom skalárnych súčinov na základe vlastností a), b), c) skalárneho súčinu dostaneme tieto vzťahy:

$$\begin{aligned}\|y_k - y_r\|^2 &= \langle (y_k - x) - (y_r - x), (y_k - x) - (y_r - x) \rangle = \\ &= 2\|y_k - x\|^2 + 2\|y_r - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_k + y_r) - x\right\|^2 \leqq \\ &\leqq 2\|y_k - x\|^2 + 2\|y_r - x\|^2 - 4\delta^2\end{aligned} \tag{14}$$

V ostatnej nerovnosti sme využili, že $(y_k + y_r)/2 \in M$.

Zo vzťahu (14) vyplýva:

$$0 \leqq \lim_{k,\, r\to\infty} \|y_k - y_r\|^2 \leqslant 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

a teda postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. M je Hilbertov priestor, teda z definície 1 vyplýva, že existuje bod $y_x \in M$, ktorý je limitou postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y_x\| = 0 \tag{15}$$

Z vlastnosti d) normy $\|\ \|$ uvedenej v cvičení 1 vyplýva

$$\|x - y_x\| \leqq \|x - y_n\| + \|y_n - y_x\|$$

a

$$\|x - y_n\| \leqq \|x - y_x\| + \|y_x - y_n\|$$

teda

$$|\,\|x - y_x\| - \|x - y_n\|\,| \leqq \|y_x - y_n\|$$

Táto nerovnosť spolu s (13) a (15) dokazuje vyžadovanú rovnosť (11).

Označme $z = x - y_x$. Pre každé $\alpha \in R$, $y \in M$, $y \neq 0$ platí:

$$\|\alpha y + z\| = \|\alpha y - y_x + x\| \geqq \delta = \|z\|$$

keďže $\alpha y - y_x \in M$. Z toho vyplýva:

$$0 \leqq \|z + \alpha y\|^2 - \|z\|^2 = 2\alpha\langle z, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2; \quad (\alpha \in R). \tag{16}$$

Do (16) dosaďme $\alpha = -\langle z, y\rangle/\|y\|^2$

Dostaneme:

$$0 \leqq -|\langle z, y\rangle^2/\|y\|^2|$$

a teda $\langle z, y\rangle = 0$, t.j. platí rovnosť (12).

Nech $y_0 \in M$ a nech platí:

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in M\}$$

Z rovnosti (12) pomocou Pythagorovej vety (cvičenie 2) vyplýva:

$$\|y_0 - y_x\|^2 + \|x - y_x\|^2 = \|x - y_0\|^2$$

a teda $\|y_0 - y_x\| = 0$, čo značí, že prvok y_x je určený jednoznačne.

Zobrazenie

$$P_M : H \mapsto M$$

ktoré každému $x \in H$ priradí y_x podľa vzťahu (11) sa nazýva projekcia na podpriestor M.

Platí:

a) Zobrazenie P_M je lineárne, t.j. pre $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in R$ je:

$$P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y \tag{17}$$

b) Zobrazenie P_M je ohraničené jednotkou v zmysle

$$\max\{\|P_M x\| / \|x\| : x \in H, x \neq 0\} = 1 \tag{18}$$

c) Pre každé $x \in H$ platí:

$$P_M P_M x = P_M x \tag{19}$$

d) Pre každé $x, y \in H$ platí:

$$\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle \tag{20}$$

Dokážeme vlastnosť a). Dôkaz ostatných vlastností je podobný a o niečo ľahší, preto ho prenechávame čitateľovi ako cvičenie.

Dôkaz a): Nech $x, z \in H$. platí:

$$\begin{aligned} \|x + z - P_M(x + z)\|^2 &= \min\{\|x + z - y\|^2 : y \in M\} \\ &= \min\{\|(x - y_x) + z - (y - y_x)\|^2 : y \in M\} \\ &= \min\{\|x - y_x + z - y^*\|^2 : y^* \in M\} \\ &= \|x - y_x\|^2 + \min\{\|z - y^*\|^2 + 2\langle x - y_x, z\rangle : y^* \in M\} \end{aligned} \tag{21}$$

kde sme využili, že $\langle x - y_x, y^*\rangle = 0$ (rovnosť (12)).

Ak podobne využijeme, že $\langle x - y_x, y_x\rangle = 0$ a vzťah (11), potom ostatný výraz vo vzťahu (21) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}&\|x-y_x\|^2+\|z-y_z\|^2+2\langle x-y_x, z-y_x\rangle=\\&=\|x+z-y_x-y_z\|^2=\|x+z-(P_Mx+P_Mz)\|^2\end{aligned}$$

Teda

$$\|x+z-P_M(x+z)\|=\|x+z-(P_Mx+P_Mz)\|$$

a z jednoznačnosti prvku y_x v rovnosti (11) dostaneme:

$$P_M(x+z)=P_Mx+P_Mz$$

Podobne pre $\alpha\neq 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned}\|\alpha x-P_M(\alpha x)\|&=\min\{\|\alpha x-y\|: y\in M\}\\&=\min\{\|\alpha x-\alpha y\|: y\in M\}\\&=|\alpha|\min\{\|x-y\|: y\in M\}\\&=|\alpha|\,\|x-y_x\|\\&=\|\alpha x-\alpha P_Mx\|\end{aligned}$$

Teda z jednoznačnosti prvku y_x vo vzťahu (12) vyplýva:

$$P_M(\alpha x)=\alpha P_Mx. \quad \square$$

Tvrdenie 3. Ak zobrazenie

$$P: H\mapsto H$$

má vlastnosti a), b), c), d) tak P je projekcia na niektorý podpriestor M Hilbertovho priestoru H.

Dôkaz. Definujme:

$$M\equiv\{y\in H: Py=y\}$$

Z vlastností a), b) vyplýva, že M je uzavretý podpriestor. Pre každé $x\in H$, $y\in M$ dostaneme pomocou c), d)

$$\begin{aligned}\langle x-Px, y\rangle&=\langle x-Px, Py\rangle\\&=\langle x, Py\rangle-\langle Px, Py\rangle\\&=\langle x, Py\rangle-\langle x, PPy\rangle\\&=0\end{aligned}$$

Teda pomocou Pythagorovej vety (cvičenie 2) pre každé $y \in M$, $x \in H$ môžeme písať

$$\|y-x\|^2 = \|y-Px\|^2 + \|x-Px\|^2$$

z čoho vyplýva:

$$\|x-Px\|^2 \leqq \|y-x\|^2; \quad (y \in M)$$

t. j. platí (11). □

(Dokončenie v budúcom čísle.)