ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Bohuslav Sivák, Katedra matematiky Pedagogickej fakulty,
974 00 Banská Bystrica, Podlavická cesta 975.
Nové úlohy (s riešeniami) posielajte na jeho adresu.

Úloha *A* (Š. Sakáloš)

Najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x označujeme $[x]$ a nazývame celou časťou čísla x. Číslo $x-[x]$ nazývame necelou časťou čísla x a označujeme $\{x\}$. Zistite, aké hodnoty nadobúda výraz

$$\{n^{12}.\,1{,}\overline{384\,615}\},$$

ak n prebieha všetky prirodzené čísla!

Riešenie: Vyjadrime periodické číslo $1{,}\overline{384\,615}$ v tvare zlomku:

$$1{,}\overline{384\,615}=1+\frac{384\,615}{10^6-1}=1+\frac{384\,615}{999\,999}=1+\frac{5}{13}=\frac{18}{13}.$$

Hľadáme teda hodnoty, ktoré nadobúda výraz $\left\{n^{12}\cdot\frac{18}{13}\right\}$.

Môžeme vypočítať (pomocou kalkulačky):

$(1^{12}\times 18):13\doteq 1{,}384\,615\,384\,615\,3$
$(2^{12}\times 18):13\doteq 5\,671{,}384\,615\,384\,6$
$(3^{12}\times 18):13\doteq 735\,841{,}384\,615\,38$
$(4^{12}\times 18):13\doteq 23\,229\,991{,}384\,615$

Pokúsme sa dokázať hypotézu: Pre každé prirodzené číslo n platí $\left\{n^{12}\cdot\frac{18}{13}\right\}=0{,}\overline{384\,615}=\frac{5}{13}$. To by však znamenalo, že číslo $18n^{12}$ má pri delení číslom 13 zvyšok 5, t. j., že číslo n^{12} má pri delení číslom 13 zvyšok 1.

Z *Malej vety Fermatovej* vyplýva, že ak $13 \nmid n$, potom $13 | n^{12} - 1$. Existuje teda celé číslo k tak, že $n^{12} - 1 = 13k$. Teda:

$$\left\{n^{12} \cdot \frac{18}{13}\right\} = \left\{(13k+1) \cdot \frac{18}{13}\right\} = \left\{18k + 1 + \frac{5}{13}\right\} = \frac{5}{13}.$$

Ak $13 | n$, potom $13 | n^{12}$, takže existuje celé číslo q tak, že $n^{12} = 13q$. Teda:

$$\left\{n^{12} \cdot \frac{18}{13}\right\} = \left\{13q \cdot \frac{18}{13}\right\} = \left\{18q\right\} = 0.$$

Hypotéza je nepravdivá. Dokázali sme však: Výraz $\{n^{12} \,.\, 1{,}\overline{384\,615}\}$ nadobúda hodnoty 0 (ak $13 | n$) a $\frac{5}{13}$ ak $13 \nmid n$).

Úloha *A* (Š. Sakáloš)

Dokážte, že pre každé reálne číslo x a pre každé prirodzené číslo n platí:

$$[x] = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{x+1}{n}\right] + \left[\frac{x+2}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{x+n-1}{n}\right].$$

Riešenie: Číslo $[x]$ je celé, n prirodzené, teda existujú celé čísla k, q tak, že $[x] = kn + q$ a $0 \leqq q < n$. Označme $\{x\} = \alpha$. Potom $x = [x] + \{x\} = kn + q + \alpha$. Počítajme:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{x+i}{n}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{kn+q+\alpha+i}{n}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} k + \left[\frac{q+\alpha+i}{n}\right] =$$
$$= kn + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{q+\alpha+i}{n}\right].$$

Stačí teda ukázať, že $\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{q+\alpha+i}{n}\right] = q$.

Pretože $0 \leqq \frac{q+\alpha+i}{n} < 2$, výraz $\frac{q+\alpha+i}{n}$ nadobúda hodnotu 0 alebo 1.

Hodnotu 1 nadobúda práve vtedy, keď $\frac{q+\alpha+i}{n} \geqq 1$, t. j. keď $i \geqq$ $\geqq n-q-\alpha$. Číslo α je z intervalu $\langle 0, 1)$, teda $n-q-1 < n-q-\alpha \leqq$ $n-q$. Výraz $\left[\frac{q+\alpha+i}{n}\right]$ nadobúda hodnotu 1 práve vtedy, keď $i \geqq$ $n-q$, t. j. keď $i \in \{n-q, n-q+1, n-q+2, \ldots, n-q\}$. Skutočne, $\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{q+\alpha+i}{n}\right] = q$.

Úloha *A* (podľa úlohy z X. MMO)

Dokážte, že pre každé nezáporné reálne číslo x platí

$$[x] = \left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$$

Riešenie: Ak $x = 0$, je tvrdenie zrejmé.
Nech $x > 0$. Podľa predošlej úlohy platí:

$$[x] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right],$$

t. j. $\left[\frac{x+1}{2}\right] = [x] - \left[\frac{x}{2}\right]$.

Podobne pre každé celé číslo $k \geqq 0$:

$$\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{\frac{x}{2^k}+1}{2}\right] = \left[\frac{x}{2^k}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right].$$

Teda

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \left[\frac{x+4}{8}\right] + \ldots =$$

$$= [x] - \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] - \left[\frac{x}{8}\right] + \ldots \qquad (*)$$

Pre $k > \log_2 x$ platí $\left[\frac{x}{2^k}\right] = 0$. Sčítance na pravej strane rovnosti (*) sa od istého miesta rovnajú nule, teda skutočne:

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \left[\frac{x+4}{8}\right] + \ldots = [x].$$