

## HRANOVÉ FARBENIE KOMPLETNÉHO GRAFU

PAVEL HANZEL, Banská Bystrica

Problematika farbenia hrala v teórii grafov významnú úlohu už pri vytváraní samotných základov tejto teórie a aj v súčasnosti sa mnoho autorov zaoberá rôznymi variantmi farbenia prvkov grafov. V tomto článku sa budeme zaoberať hranovým farbením kompletneho grafu.

Kompletným grafom  $K_p$  nazývame usporiadanú dvojicu  $K_p = (V; E)$ , kde  $V$  je množina vrcholov  $v_1, v_2, \dots, v_p$  a  $E$  množina hrán  $\{v_x v_y; 1 \leq x < y \leq p\}$ . Symbolom  $K_p - v_x$  budeme označovať kompletný graf na množine vrcholov  $V \setminus \{v_x\}$ . Ďalej budeme používať označenie ako v práci [2], pričom základné pojmy z teórie grafov, ktoré nebudú definované v tomto článku, čitateľ nájde v práci [3].

**Definícia 1.** Nech  $K_p$  je kompletný graf s  $p$  vrcholmi  $v_1, v_2, \dots, v_p$  a s množinou hrán  $E$  a nech  $c$  je kladné celé číslo, potom pod kompletným  $c$ -farbením hrán grafu  $K_p$  rozumieme zobrazenie

$$g: E \rightarrow \{1, 2, \dots, c\}$$

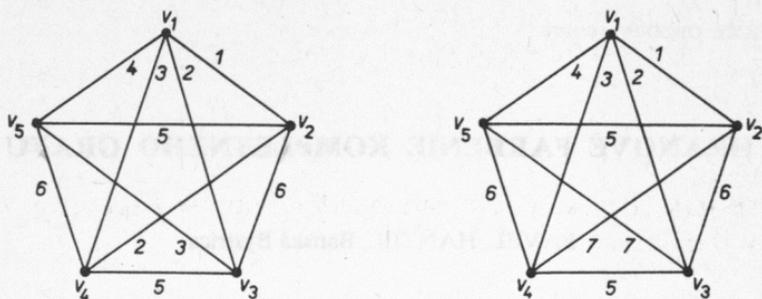
také, že ak  $u, v \in E$  sú dve susedné hrany, potom  $g(u) \neq g(v)$  a pre ľubovoľné dve celé čísla  $i, j (1 \leq i < j \leq c)$  existujú dve susedné hrany  $u, v \in E$  také, že  $g(u) = i, g(v) = j$ .

**Definícia 2.** Achromatický index  $\alpha(K_p)$  je najväčšie celé číslo  $c$  také, že existuje kompletné  $c$ -farbenie hrán v grafe  $K_p$ .

*Príklad.* Pre kompletný graf  $K_5$  existuje kompletné 6-farbenie a 7-farbenie hrán, ako ukazuje obr. 1.

V práci [1] je nájdené pre achromatický index kompletneho grafu  $K_p$  ohraničenie

$$\text{ak } p \geq 16, \text{ potom } \frac{3p-3}{2} \leq \alpha(K_p) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + p(p-1)(p-2)}.$$



Obr. 1

V tomto článku ukážeme, že  $2p - 3 \leq \alpha(K_p)$  ak  $p$  je nepárne číslo a  $2p - 4 \leq \alpha(K_p)$  ak  $p$  je párne číslo, pričom  $p \geq 6$ .

Achromatický index kompletneho grafu  $K_p$  musí byť väčší alebo rovnajúci sa stupňu ľubovoľného vrchola v  $K_p$ . Toto tvrdenie možno formulovať pomocou  $l$ -faktorizácie pre kompletne grafy s párnym počtom vrcholov.

**Lema.** Nech  $K_{2n}$  je kompletný graf s množinou vrcholov  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$  a nech systém  $S = \{X_k; X_k \text{ — lineárny faktor } K_{2n}\}$  je určitá pevne zvolená  $l$ -faktorizácia grafu  $K_{2n}$ , potom zobrazenie

$$g: E \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$$

definované tak, že

$$g(v_x v_y) = k \Leftrightarrow v_x v_y \in X_k, X_k \in S \text{ pre } k = 1, 2, \dots, 2n - 1$$

je kompletne  $(2n - 1)$ -farbenie hrán grafu  $K_{2n}$ .

**Tvrdenie 1.** Nech  $v_0, v_1, \dots, v_{2n}$  sú vrcholy kompletneho grafu  $K_{2n+1}$  a nech systém  $S = \{X_k; X_k \text{ — lineárny faktor } K_{2n+1} - v_0\}$  je určitá pevne zvolená  $l$ -faktorizácia grafu  $K_{2n+1} - v_0$ , nech zobrazenie

$$g: E \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n - 1\}$$

je definované tak, že

$$g(v_0v_x) = x$$

$$g(v_xv_y) = 2n + k \Leftrightarrow v_xv_y \in X_k, X_k \in S, \text{ pre } k = 1, 2, \dots, 2n - 1.$$

Potom  $g$  je kompletné  $(4n - 1)$ -farbenie hrán v  $K_{2n+1}$ .

Dôkaz.

a) Nech  $v_xv_y, v_xv_z$  sú dve rôzne susedné hrany v  $K_{2n+1}$  (t. j.  $v_y \neq v_z$ ) pre  $x = 0$  dostávame

$$g(v_0v_y) = y \neq z = g(v_0v_z);$$

pre  $x > 0, y = 0, z > 0$  dostávame

$$g(v_xv_y) = x \leq 2n, g(v_xv_z) = 2n + k,$$

kde  $k$  je index lineárneho faktora  $X_k \in S$ , do ktorého patrí hrana  $v_xv_z$ ; pre  $x > 0, y > 0, z > 0$  hrany  $v_xv_y, v_yv_z$  patria dvom rôznym lineárnym faktorom systému  $S$  a podľa lemy je

$$g(v_xv_y) \neq g(v_xv_z).$$

b) Nech  $i, j$  sú dve celé čísla také, že

$$1 \leq i < j \leq 4n - 1.$$

Uvažujme tri prípady: 1.  $j \leq 2n$ ; 2.  $i \leq 2n$ ; 3.  $i > 2n$ .

V prvom prípade existujú hrany  $v_0v_i, v_0v_j \in E$  také, že

$$g(v_0v_i) = i, g(v_0v_j) = j.$$

V druhom prípade pre hrany  $v_0v_i, v_iv_x \in X_j$  (existencia takého lineárneho faktora vyplýva z vlastností  $l$ -faktorizácie  $S$ ) dostávame

$$g(v_0v_i) = i, g(v_iv_x) = j.$$

V treťom prípade vyplýva existencia susedných hrán ofarbených farbami  $i, j$  z tvrdenia lemy.

**Dôsledok 1.** Pre achromatický index kompletného grafu  $K_p$  s nepár-  
nym počtom vrcholov platí

$$\alpha(K_p) \cong 2p - 3.$$

**Tvrdenie 2.** Nech  $v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}$  sú vrcholy kompletného grafu  $K_{2n}$   
( $n \cong 3$ ) a systém  $S = \{X_k; X_k \text{ — lineárny faktor } K_{2n} - v_0 - v_1\}$  je urči-  
tá pevne zvolená  $l$ -faktorizácia grafu  $K_{2n} - v_0 - v_1$ , nech zobrazenie

$$g: E \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n - 4\}$$

je definované tak, že

1.  $g(v_0v_x) = x$ ,
2.  $g(v_1v_2) = 2n$ ,  $g(v_1v_3) = 5$ ,  $g(v_1v_4) = 3$ ,  $g(v_1v_5) = 4$ ,
3.  $g(v_1v_x) = (2n - 1) - (x - 6)$ ,  $x \cong 6$ ,
4.  $g(v_xv_y) = 2n + (k - 1)$ ,  $v_xv_y \in X_k$  pre  $k > 1$ ,
5.  $g(v_xv_y) = 1$ ,  $v_xv_y \in X_1$ .

Potom  $g$  je kompletné  $(4n - 4)$ -farbenie hrán v  $K_{2n}$ .

Dôkaz.

a) Nech  $v_xv_y, v_xv_z$  sú dve rôzne susedné hrany grafu  $K_{2n}$ ,  
pre  $x = 0$  dostávame

$$g(v_xv_y) = y \neq z = g(v_xv_z).$$

V ďalšom bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že  $y < z$   
pre  $x = 1$ ,  $y, z \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$  sa dá ľahko nahliadnúť, že

$$g(v_1v_y) \neq g(v_1v_z);$$

pre  $x = 1$ ,  $y \cong 6$  dostávame

$$g(v_1v_y) = (2n - 1) - (y - 6) > (2n - 1) - (z - 6) = g(v_1v_z);$$

pre  $x > 1$  uvažujme tri prípady: 1.  $y = 0$ ,  $z = 1$ ; 2.  $y = 1$ ,  $z > 1$ ;

3.  $1 < y < z$ .

V prvom prípade na základe *tab. 1* dostávame

$$g(v_x v_0) \neq g(v_x v_1).$$

Tabuľka 1

$x$	2	3	4	5	$x > 5$
$g(v_x v_0)$	2	3	4	5	$x$
$g(v_x v_1)$	$2n$	5	3	4	$(2n-1)-(x-6)$

V druhom prípade

$$2 < g(v_x v_1) \leq 2n, g(v_x v_2) = \begin{cases} 2n + (k-1), & k > 1 \\ 1, & v_x v_2 \in X_1 \end{cases}$$

odkiaľ

$$g(v_x v_1) \neq g(v_x v_2).$$

V treťom prípade hrany  $v_x v_y$ ,  $v_x v_z$  patria dvom rôznym lineárnym faktorom systému  $S$ , a teda  $g(v_x v_y) \neq g(v_x v_z)$ .

b) Nech  $i, j$  sú dve celé čísla také, že

$$1 \leq i < j \leq 4n - 4.$$

Potom pre  $i \leq 2n$  ľahko sa dá nahliadnuť, že existujú dve rôzne susedné hrany  $v_x v_y$ ,  $v_x v_z$ , pričom  $g(v_x v_y) = i$ ,  $g(v_x v_z) = j$ .

Pre  $i = (2n-1) + k_1$ ,  $j = (2n-1) + k_2$ , kde  $2 \leq k_1 < k_2 \leq 2n-3$  existencia susedných hrán  $v_x v_y$ ,  $v_x v_z$  takých, že

$$g(v_x v_y) = i, g(v_x v_z) = j$$

vyplýva z tvrdenia lemy a z vlastností  $l$ -faktorizácie grafu  $K_{2n} - v_0 - v_1$ .

**Dôsledok 2.** Pre achromatický index kompletneho grafu  $K_p$  s párnym počtom vrcholov platí

$$\alpha(K_p) \geq 2p - 4.$$

## Literatúra

- [1] Bories, F. — Jolivet, J.-L.: On complete colourings of graphs. In: *Recent Advances in Graph Theory, Proc. Symp. Prague, 1974. Academia, Prague 1975, 75—87*
- [2] Bosák, J. — Nešetřil, J.: Complete and pseudocomplete colourings of graph. *Mathematica Slovaca* 3, 1976, 171—184
- [3] Harary, F.: *Graph Theory. Addison-Wesley, 1969*