MATEMATICKÉ OBZORY 16/1980

O INTEGROVATEĽNOSTI SPOJITÝCH FUNKCIÍ

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

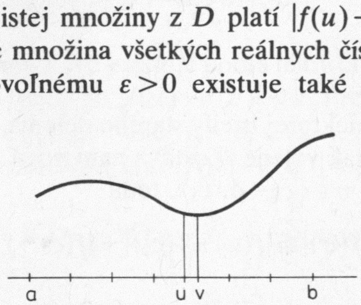
Skutočnosť, že každá funkcia spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervale integrovateľná, je veľmi dobre známa. Menej častý je jej dôkaz (napr. [1], kap. II, § 8). Chýba dokonca v takej fundovanej publikácii, akou je [2]. Príčina tkvie v tom, že obvyklý dôkaz sa opiera o rovnomernú spojitosť funkcie spojitej na kompaktnom intervale. Už sám pojem rovnomernej spojitosti je taký náročný, že autori radšej celý dôkaz vynechajú. A aj keď ho uvedú, často poradia čitateľovi, aby ho radšej vynechal ([3], § 9).

V tomto článku uvedieme jednoduchý dôkaz naznačeného tvrdenia nevyžadujúci pojem rovnomernej spojitosti. Podobný dôkaz uvádzajú vo svojej učebnici Vilenkin a Švarcburd [4]. Na rozdiel od týchto autorov používame inú formuláciu spojitého rozloženia reálnej osi. V súlade s tradíciou, vytvorenou u nás Jarníkovými knihami, použijeme vetu o supréme: Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má suprémum.

Pravda, v tejto poznámke uvedieme len hlavnú myšlienku. Nestálo by za to opísať kvôli jednému dôkazu celý integrálny počet.

Lema. Nech f je funkcia spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$, že pre všetky u, v patriace do tej istej množiny z D platí $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Dôkaz. Nech M je množina všetkých reálnych čísel $c \in \langle a, b \rangle$ s touto vlastnosťou: K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také delenie D intervalu



Obr. 1

$\langle a, c\rangle$, že pre všetky u, v patriace do tej istej triedy delenia D platí $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$ *(obr. 1)*. Stačilo by nám dokázať, že $b\in M$.

Množina M je neprázdna. To odvodíme zo spojitosti (sprava) funkcie f v bode a. Existuje také $\delta>0$, že pre všetky $x\in\langle a, a+\delta)$ platí $|f(a)-f(x)|<\varepsilon/2$. Položme $c=a+\delta/2$ a zostrojme delenie D pozostávajúce z jedinej triedy ohraničenej krajnými bodmi a, c. Ak $a\leqq u$, $v\leqq c$, tak

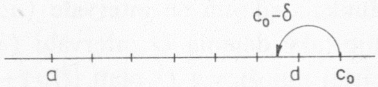
$$|f(u)-f(v)|=|f(u)-f(a)+f(a)-f(v)|\leqq$$

$$\leqq|f(u)-f(a)|+|f(a)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Teda skutočne $c=a+\dfrac{\delta}{2}\in M$.

Označme $c_0=\sup M$. (M je ohraničená, lebo $M\subset\langle a, b\rangle$.)

Najprv dokážeme, že $c_0\in M$. Pretože f je spojitá (aspoň zľava) v bode c_0, existuje také $\delta>0$, že pre všetky $x\in(c_0-\delta, c_0\rangle$ platí $|f(x)-f(c_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ale $c_0-\delta<c_0$, teda $c_0-\delta$ už nie je horným ohraničením množiny M(c_0 je najmenšie!), existuje teda také $d\in M$, že $c_0-\delta<d$. K číslu d už existuje delenie intervalu $\langle a, d\rangle$ vyžadovaných vlastností. Ak k nemu pridáme ako ďalší deliaci bod c_0, dostaneme nové delenie, teraz už intervalu $\langle a, c_0\rangle$ *(obr. 2)*.



Obr. 2

Ak u, v patria do niektorej triedy starého delenia, tak $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$, lebo to delenie bolo tak volené. Zostáva nám *nová* trieda $\langle d, c_0\rangle$. Ak u, $v\in\langle d, c_0\rangle$, tak aj $u, v\in\langle c_0-\delta, c_0\rangle$, teda

$$|f(u)-f(v)|\leqq|f(u)-f(c_0)|+|f(c_0-f(v)|<\varepsilon$$

Napokon dokážeme, že $c_0=b$. Postupujeme nepriamo: nech $c_0<b$. Zo spojitosti funkcie f v bode c_0 (stačí sprava) vyplýva existencia takého

$\delta > 0$, že $|f(x) - f(c_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pre všetky $x \in \langle c_0, c_0 + \delta)$. Keďže $c_0 \in M$, existuje k nemu patričné delenie intervalu $\langle a, c_0 \rangle$. Ak k tomuto deleniu pridáme ešte bod $c_0 + \frac{\delta}{2}$, dostaneme tiež delenie s vyžadovanou vlastnosťou, lenže intervalu $\left\langle a, c_0 + \frac{\delta}{2} \right\rangle$. Teda $c_0 + \frac{\delta}{2} \in M$. A to je spor, lebo c_0 je horné ohraničenie množiny M; malo by byť preto $c_0 + \frac{\delta}{2} \leqq c_0$.

Určitý integrál sa dá zaviesť všelijako. My dokazované tvrdenie vyjadríme pomocou horných a dolných súčtov.

Nech

$$D: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$, m_i je minimum, M_i je maximum funkcie f na intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Potom dolný integrálny súčet (patriaci k deleniu D) je:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

horný integrálny súčet zase

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Veta. Ak f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak

$$\sup_D s(f, D) = \inf_D S(f, D)$$

Dôkaz. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje podľa lemy také delenie D, že pre všetky u, v z tej istej triedy je $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$. Pretože f je spojitá na intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, existujú také c_i, $d_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, že $f(c_i) = m_i$, $f(d_i) = M_i$. Podľa predchádzajúceho $|f(c_i) - f(d_i)| < \varepsilon$. Preto

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a)$$

Literatúra

1. Jarník, V.: Integrální počet I. 1. vyd. Praha, Academia 1974.
2. Medek, V.—Mišík, L.—Šalát, T.: Repetitórium stredoškolskej matematiky. 1. vyd. Bratislava, Alfa 1976.
3. Neubrunn, T.—Riečan, B.: Miera a integrál, učebnica pre triedy s rozšíreným vyučovaním matematiky. 1. vyd. Bratislava, SPN 1977.
4. Vilenkin, N. Ja.—Švarcburd, S. I.: Matematičeskij analiz, učebnoje posobie dľa 9—10 k. s mat. spec. 1. vyd. Moskva, Prosveščenije 1973.