

## HRA BARD

MILAN HEJNÝ, Bratislava

V posledných dvoch desaťročiach vzrástol záujem matematikov o teóriu hier. Ukázalo sa, že problematika teórie hier je blízka k mnohým dôležitým oblastiam súdobej aplikovanej, ale aj „čistej“, matematiky. Myšlienky objavené v teórii hier nachádzajú uplatnenie v ekonomike, plánovaní, doprave, zásobovaní a pod. Práca na „automate, ktorý vie hrať sáh“ priniesla už nejeden objav a, čo viac, nejeden problém.

Hlavným problémom teórie hier je problém konštrukcie optimálnej stratégie. Ide o to nájsť návod, ako má danú hru hrať hráč, aby aj proti „dokonalému“ súperovi získal najlepší výsledok. Pri niektorých hrách, kde dôležitú úlohu hrá náhoda (kartové hry, hry v kocky ...), nemožno dať návod zaručujúci istotu. Existujú však aj také hry, kde presný návod na „najlepšiu hru“ existuje. Jednou takou hrou je aj hra Bard.

Matematickú hru Bard sme vymysleli pre potreby pionierskych táborov mladých matematikov. Po prvý raz sa hrala r. 1977 v tábore, ktorý sa konal v Bardejove. Odtiaľ má aj meno.

*Pravidlá hry Bard.* Dvaja hráči striedavo vpisujú do deviatich polí tabuľky  $3 \times 3$  čísla 1, 2, ..., 9. Každé číslo sa vyskytne práve raz. Začínajúci hráč **A** zapíše 5 čísel, druhý hráč **B** zapíše 4 čísla. Po vyplnení tabuľky sa spočítajú trojice čísel v každom riadku i stĺpco. Každé z týchto šiestich čísel znamená jeden kladný bod. Bod patrí hráčovi **A** práve vtedy, keď dané číslo nie je deliteľné 3; v opačnom prípade patrí bod hráčovi **B**. Napríklad v partii nakreslenej na obr. 1 sú riadkové súčty 12, 14, 19 a stĺpcové súčty

7	2	3
1	9	4
6	5	8

Obr. 1

14, 16, 15. Práve dve z týchto šiestich čísel sú deliteľné tróma. Teda v danej partii vyhral hráč A v pomere 4:2.

V hre Bard majú hráči odlišné pravidlá. Preto zápas bude tvoriť dvojica partií, v ktorých začínajúceho bude robiť najprv jeden, a potom druhý z hráčov.

*Stratégia hry Bard.* Opísaná hra má konečnú stratégiu, ktorú vieme napísať. To značí, vieme napísať návod pre hráča A, ako má hrať, aby aj proti „dokonalému“ protivníkovi B uhral čo najviac bodov. Podobný návod vieme dať i pre hráča B. Cieľom článku je ukázať, ako sme obe stratégie odhalili. Čitateľovi odporúčame pokúsiť sa o riešenie problému samostatne. Bez nadobudnutia samostatných skúseností neprinesie čítanie návodov pre čitateľa veľký poznatok, ani zážitok.

Zvyčajný spôsob analýzy „malých“ hier začína vypísaním „atlasu situácií“, t. j. úplného zoznamu situácií, ktoré sa v hre môžu vyskytnúť. V hre Bard existuje  $9! = 362\ 880$  konečných pozícii. Pre počítač nie je toto číslo nereálne, ale pre prácu na kolene je tretina milióna priveľa. Preto musíme hľadať spôsoby, ako problematiku zjednodušiť. Urobíme to tak, že hru Bard prevedieme na inú, jednoduchšiu hru, ktorej „atlas situácií“ budeme vedieť vypísať na konečnom priestore a v konečnom čase.

Všimnime si dôležitú vec. Pri hodnotení hry nie je rozhodujúca veľkosť čísel, ale iba ich zvyšok pri delení tróma. Preto z hľadiska hry sú čísla 1, 4, 7 rovnaké. Podobne sú rovnaké 2, 5, 8 a tiež 3, 6, 9. netreba písať deväť rozličných čísel. Stačí písať po tri symboly 1, 2 a 3. V takomto zjednodušenom zápise bude partia z obr. 1 vyzeráť tak, ako je naznačené na obr. 2.

1	2	3
1	3	1
3	2	1

Obr. 2

Všimnime si teraz, ako môže vyzerať trojica symbolov jedného riadku či stĺpca. V podstate nastávajú tri možnosti

a) všetky tri symboly sú rovnaké,

- b) práve dva symboly sú rovnaké,
- c) všetky tri symboly sú navzájom rôzne.

V prípade a či c bude výsledná suma deliteľná 3, a teda príslušný bod získa hráč **B**. V prípade b dané číslo nebude 3 deliteľné — bod získa hráč **A**.

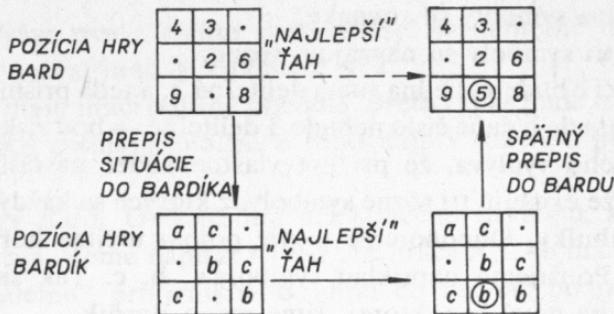
Z uvedeného vyplýva, že pri hre vlastne vôbec na číslach nezáleží. Dôležité je, že existujú tri rôzne symboly, z ktorých sa každý práve 3 razy zapíše do tabuľky. Ohodnotenie partie potom určíme hore uvedenými pravidlami. Použijeme napríklad symboly a, b, c. Tak sme hru **Bard** zjednodušili na novú hru, ktorej dáme meno **Bardík**.

*Pravidlá hry Bardík.* Dvaja hráči striedavo vpisujú do deviatich polí tabuľky  $3 \times 3$  symboly a, b, c — každý symbol práve 3 razy. Po vyplnení tabuľky získa prvý hráč **A** po jednom bode za každý riadok či stĺpec, v ktorom platí b; po jednom bode za každý zvyšný stĺpec (v ktorom teda platí a, prípadne c) získa druhý hráč **B**.

*Porovnanie stratégií hier Bard a Bardík.* Je očividné, že hra Bardík je značne jednoduchšia ako hra Bard. Napriek tomu sú stratégie oboch hier ekvivalentné. Poznajúc stratégiu jednej z nich, budeme vedieť i stratégiu druhej. Toto tvrdenie si zdôvodníme.

Predstavme si, že poznáme stratégiu hry Bardík, t. j. vieme, ako „najlepšie“ ťahať v ľubovoľnej situácii hry. Dokážeme, že potom poznáme i stratégiu hry Bard. Nech je teda daná rozohratá partia Bardu. V prvom kroku prepíšeme pozíciu do jazyka Bardíka tak, že namiesto symbolov 1, 4, 7 píšeme a, namiesto symbolov 2, 5, 8 píšeme b, namiesto symbolov 3, 6, 9 píšeme c. (Je nepodstatné, kde volíme a, kde b, kde c; dôležité je iba to, aby každá z uvedených trojíc čísel bola zastupovaná rovnakým písmenom.) Tak sme získali pozíciu hry Bardík. Podľa predpokladu teraz poznáme „najlepší“ tah. Spočíva v zapísaní jedného voľného symbolu do jedného prázdneho poľa tabuľky. Tomuto tahu z Bardíka zodpovedá „najlepší“ tah Bardu: do toho istého poľa tabuľky Bard zapíšeme niektoré z voľných čísel zodpovedajúcich danému písmenu. Najlepšie to pochopíme na ilustrácii obr. 3.

Poznamenajme, že v hornej ilustrácii sme slovo „najlepší“ nemuseli dávať do úvodzoviek. Je to jediný tah (ňahal hráč **A**), ktorý zaručuje hráčovi **A** víťazstvo 4:2. Akýkoľvek iný tah vedie k výsledku 4:2 v prospech hráča **B**. Vo všeobecnosti však „najlepších“ tahov je viacero, preto toto slovo dávame radšej do opatrných úvodzoviek.



Obr. 3

Problém nájdenia stratégie hry Bard sme zjednodušili na problém nájdenia stratégie hry Bardík. Tú teraz nájdeme.

*Stratégia hry Bardík:* začnime tým, že vypočítame, koľko je možných výsledných pozícii hry Bardík. Do práznej tabuľky môžeme trojicu symbolov  $a, a, a$  umiestniť  $\binom{9}{3} = 84$  spôsobmi. Do zvyšných 6 prázdnych polí potom umiestníme trojicu  $b, b, b$ . To možno uskutočniť  $\binom{6}{3} = 20$  spôsobmi. Preto všetkých možných výsledných pozícii Bardíka je  $84 \cdot 20 = 1680$ . Hoci je toto číslo 216-násobne menšie, ako bolo pri Barde, je ešte stále neslušne veľké. Hľadáme ďalšie zjednodušenia. Uvedomíme si, že mnohé situácie, ktoré sú na pohľad rôzne, sú v podstate „rovnaké“ — dávajú výsledok hry. V ľubovoľnej výslednej pozícii môžeme urobiť určité zmeny a nenarušíť tým výsledok. Existujú dokonca dva druhy takých zmien. Pre naše ciele sú tieto zmeny také dôležité, že im venujeme osobitnú úctu — matematickú vetu.

**Veta 1.** Ohodnotenie výslednej pozície partie Bardík sa nezmení, ak v tabuľke uskutočníme ktorúkoľvek z týchto troch zmien:

1. prestavíme navzájom stĺpce či riadky,
2. „preklopíme“ tabuľku okolo niektornej z dvoch jej diagonál,
3. zameníme navzájom symboly  $a, b, c$ .

Dôkaz vety je jednoduchý. Stačí, keď si uvedomíme, že žiadna zo zmien nemení počet tých riadkov či stĺpcov, ktoré vyhovujú pdomienke b.

Odteraz ľubovoľné dve situácie (ukončenej či rozohratej partie), ktoré možno navzájom previesť zmenami 1, 2 a 3, považujeme za *ekvivalentné*. Pýtajme sa, koľko existuje navzájom neekvivalentných výsledných situácií. Trpežlivá analýza dá odpoveď: desať. Atlas výsledných situácií je uvedený na obr. 4. Ku každej situácii sú naviac pripísané isté údaje, ktoré zohrajú úlohu finišmana pri riešení problému.

Pozrite sa na pozíciu IV (obr. 4). Symbol  $a$  sa nachádza vo všetkých troch stĺpcach, ale iba v dvoch riadkoch. Túto skutočnosť zapíšeme stručne  $ch(a) = (3, 2)$ . Teda  $ch(a)$  — charakteristika symbolu  $a$  — je usporiadaná dvojica čísel: prvé udáva počet stĺpcov a druhé počet riadkov, v ktorých sa symbol  $a$  v tabuľke vyskytuje. Podobne definujeme aj charakteristiky symbolov  $b, c$ .

**Atlas výsledných situácií Bardíka.** Existuje týchto 10 navzájom neekvivalentných výsledných situácií Bardíka. Iných nie je (obr. 4).

$\begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix}$	$(3,3)$	$\begin{matrix} a & b & b \\ b & a & c \\ c & c & a \end{matrix}$	$(3,3)$	$\begin{matrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{matrix}$	$(3,3)$	$\begin{matrix} a & a & b \\ c & b & a \\ c & b & c \end{matrix}$	$(3,2)$
I	6	II	4	III	2	IV	2
$\begin{matrix} a & a & b \\ c & c & a \\ b & b & c \end{matrix}$	$(3,2)$	$\begin{matrix} a & a & b \\ c & c & a \\ c & b & b \end{matrix}$	$(3,2)$	$\begin{matrix} a & a & b \\ b & b & a \\ c & c & c \end{matrix}$	$(3,2)$	$\begin{matrix} a & a & b \\ a & b & b \\ c & c & c \end{matrix}$	$(2,2)$
V	3	VI	1	VII	4	VIII	2
$\begin{matrix} a & a & b \\ a & c & c \\ b & c & b \end{matrix}$	$(2,2)$	$\begin{matrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{matrix}$	$(3,1)$				
IX	0	X	6				

Obr. 4

V atlase je pri každej situácii napísaná charakteristika  $ch(a)$  — v prvom,  $ch(b)$  — v druhom a  $ch(c)$  — v treťom riadku. Pod stĺpcom týchto charakterísk je jediné číslo — je to počet bodov, ktoré v danej partií získava hráč **B**.

Vyslovili sme tvrdenie, ktoré vyžaduje dva dôkazy. Treba ukázať, že žiadne dve z uvedených situácií nie sú ekvivalentné a že iných, s nimi neekvivalentných situácií, nie je. Prvý dôkaz vyplýva z charakterísk. Žiadne dve trojice charakterísk nie sú rovnaké a nemožno ich urobiť

rovnakými ani zámenou symbolov  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . To zistíme pozornejším prezre-  
tím všetkých desiatich trojíc charakteristík.

Náročnejší dôkaz druhého tvrdenia, že atlas je úplný. Tento dôkaz prenecháme čitateľovi, ktorému dáme iba radu. Analýzu všetkých mož-  
ných pozícii rozložíme do krokov. Najprv budeme skúmať tie pozície,  
ktoré obsahujú aspoň jeden symbol s charakteristikou (3, 3). Vzhľadom  
na podmienku 3 môžeme predpokladať, že týmto symbolom je práve  $a$ .  
Vzhľadom na podmienku 1 môžeme predpokladať, že tri symboly  $a$  sú  
v tabuľke rozmiestnené diagonálne, ako napr. v pozícii I. Po vyčerpaní  
tých situácií, ktoré obsahujú aspoň jeden symbol charakteristiky (3, 3),  
prejdeme k situáciám, ktoré súčasne neobsahujú ani jeden symbol charakte-  
ristiky (3, 3), ale obsahujú aspoň jeden symbol charakteristiky (3, 2).  
Takto postupujeme až do úplného vyčerpania všetkých prípadov.

Predpokladajme, že čitateľ úspešne zavŕšil dôkaz tvrdenia o atlase.  
Zoznam všetkých situácií nám dáva možnosť dokázať druhé významné  
tvrdenie o Bardíku. Opäť mu venujeme vetu.

**Veta 2.** Charakteristiky symbolov  $a$ ,  $b$ ,  $c$  udajú 6 čísel. Z nich počet  
dvojok určuje počet bodov hráča **A** a počet nepárnych čísel určuje počet  
bodov, ktoré získal v hre hráč **B**.

Dôkaz vety spočíva v preverení jej platnosti v každom z 10 prípadov  
atlasu. Skutočne, v situácii I je 6 trojok, teda výsledok partie je  $A:B =$   
 $= 0:6$ . Analogicky pre zvyšných 9 prípadov.

*Stratégia hry Bardík ukončenie.* Z vety 2 vyplýva ihneď základné  
pravidlo pre oboch hráčov. Hráč **A** sa snaží, aby charakteristiky boli  
(2, 2), hráč **B** sa snaží, aby boli (3, 3), či (3, 1). Pri obojstranne dokonalej  
hre potom každá partia skončí výsledkom 4:2 v prospech hráča **A**.  
K dôkazu záverečného tvrdenia si zavedieme pomocné označenie polí  
tabuľky, na ktorej sa hra odohráva. Označenie pomocou veľkých písmen  
je na obr. 5.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Obr. 5

**Stratégia hráča A.** Hráčovi A stačí dosiahnuť, aby jeden zo symbolov  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mal charakteristiku (2, 2). Z atlasu vidieť, že potom už A získa aspoň 4 body. Hráč A položí najprv na pole A symbol  $a$ . Hráč B má 4 možné neekvivalentné pokračovania:

1.  $a$  na B,
2.  $a$  na E,
3.  $b$  na B,
4.  $b$  na E.

Pri prvých dvoch prípadoch môže hrať A tak, že symbol  $a$  bude na A, B, E, t. j.  $ch(a) = (2, 2)$ . V prípade 3 položí hráč A symbol  $a$  na C. Hráč B musí položiť  $a$  na E (či H, čo je ekvivalentné, lebo inak bude  $ch(a) = (2, 2)$ ). Teraz položí hráč A na pole H symbol  $b$  a získa  $ch(c) = (2, 2)$ . Konečne v prípade 4 položí hráč A symbol  $c$  na I. Teraz je na ťahu hráč B. Nech urobí akýkoľvek ťah, tak v nasledujúcom ťahu hráč A položí rovnaký symbol tak, že jeho charakteristika bude (2, 2).

**Stratégia hráča B.** Každý prvý ťah hráča A je ekvivalentný s položením  $a$  na A. Hráč B položí  $b$  na B. Hráč A má 5 možných pokračovaní:

1.  $a$  na C,
2.  $a$  kamkoľvek na druhý či tretí riadok,
3.  $c$  na E,
4.  $c$  na C,
5.  $c$  na F.

V prípade 1 pokračuje B položením  $a$  na E bez ohľadu na ďalší ťah hráča A položí potom  $b$  na D alebo F. Tak charakteristika  $a$  aj  $b$  bude obsahovať aspoň jednu dvojku. V prípade 2 položí B symbol  $a$  na pole tak, že  $ch(a) = (2, 2)$ . V prípade 3 položí c na C a hrozí buď položiť  $c$  na G, alebo  $a$  na H. Preto musí hráč A položiť  $c$  na H, po čom hráč B položí  $b$  na F. V prípade 4 položí B symbol  $c$  na C a prevedie situáciu na prípad analyzovaný v bode 3. Konečne v prípade 5 položí hráč B symbol  $c$  na C. Ak teraz hráč A položí čokoľvek na D, E, G alebo H, doplní hráč B v ďalšom kroku tento stĺpec tak, že bude v prospech neho. Ak hráč A položí na I symbol  $a$ , tak B položí  $a$  na E; ak hráč A položí na pole I symbol  $b$ , tak hráč B položí  $b$  na D. Vždy potom hráč B získa symbol s charakteristikou (3, 3).

Dokázali sme záverečné tvrdenie.

**Veta 3.** Pri obojstranne optimálnej hre oboch hráčov v hre Bard či Bardík bude výsledok  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = 4 : 2$ .

Na dôvažok ešte otázka. Ako bude vyzerat stratégia hry Bard, ak pozmeníme hodnotenie — súčty deliteľné troma budú dobré body hráča **A** a súčty nedeliteľné troma budú dobré body hráča **B**?