O MATEMATICKEJ INDUKCII

HELENA BEREKOVÁ, TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Medzi metódami dôkazov matematických viet má dôležité postavenie metóda matematickej indukcie. Skúsenosti z pedagogickej práce na stredných ba i vysokých školách ukazujú, že podstata tejto metódy nie je dostatočne jasná. Študenti často nechápu, v čom spočíva ten fakt, že povestné dva kroky pri dôkaze matematickou indukciou zaručujú platnosť dokazovaného výroku pre všetky celé nezáporné čísla, ktoré prichádzajú do úvahy.

Cieľom tohto článku je prispieť k odstráneniu týchto nejasností a v rámci aplikácií metódy matematickej indukcie podať istú modifikáciu dôkazu známej vety o vyjadriteľnosti prirodzených čísel väčších než 6 v tvare súčtu navzájom rôznych prvočísel.

Princíp indukcie v množine N všetkých prirodzených čísel, ktorý v Peanovej axiomatickej sústave prirodzených čísel vystupuje ako axióma, možno vysloviť takto:

Nech množina $A \subset N$ má tieto vlastnosti:

1. $1 \in A$
2. Pre každé $k \in N$ platí: ak $k \in A$, tak aj $k+1 \in A$.

Potom $A = N$ (pozri napr. [8] s. 72).

Poznamenajme, že aj v rámci teórie množín možno vytvoriť model Peanovej axiomatickej sústavy celých nezáporných čísel (resp. prirodzených čísel) (pozri [3] s. 30, 31; [4] s. 41 až 43; [6] s. 89 až 92) a dokázať nasledujúci princíp indukcie pre množinu N_0 všetkých nezáporných celých čísel.

Princíp indukcie pre množinu N_0.

Nech množina $U \subset N_0$ má tieto vlastnosti:

1. $0 \in U$
2. Pre každé $k \in N_0$ platí: ak $k \in U$, tak aj $k+1 \in U$.

Potom $U = N_0$.

Nasledujúca veta o matematickej indukcii je jednoduchým dôsledkom princípu indukcie. Sformulujeme ju pre množinu N_0.

Veta I. Nech $\varphi(n)$ je výroková funkcia definovaná na množine N_0. Nech sú splnené tieto predpoklady:

1°. Výrok $\varphi(0)$ platí;

2°. Pre každé $k \in N_0$ platí: ak platí $\varphi(k)$, tak platí aj $\varphi(k+1)$.

Potom pre každé $n \in N_0$ platí výrok $\varphi(n)$.

Dôkaz. Položme $U = \{k \in N_0;\ \varphi(k)\}$. Z predpokladu 1° vety vyplýva, že $0 \in U$, takže je splnený 1. predpoklad v predošlom princípe indukcie. Podobne 2. predpoklad v tom princípe indukcie je splnený na základe predpokladu 2° našej vety. Z princípu indukcie vyplýva rovnosť $U = N_0$. To je však len iná formulácia tvrdenia vety.

Často treba dokazovať pomocou matematickej indukcie také vlastnosti prirodzených čísel, ktoré majú všetky prirodzené čísla okrem konečného počtu. Vtedy používame výsledok, ktorý zovšeobecňuje I. vetu.

Veta I′. Nech $m \in N$, nech $\varphi(n)$ je výroková funkcia definovaná na množine $M = \{m, m+1, \ldots, m+k, \ldots\}$.

Nech:

1. výrok $\varphi(m)$ platí;

2. pre každé $k \in M$ platí: ak platí $\varphi(k)$, tak platí aj $\varphi(k+1)$.

Potom $\varphi(n)$ platí pre každé $n \in M$.

Dôkaz. Položme:

$$U = \{0, 1, \ldots, m-1\} \cup \{k \in M;\ \varphi(k)\} \tag{1}$$

Potom $U \subset N_0$ a zrejme $0 \in U$ (teda U spĺňa prvý predpoklad v princípe indukcie pre N_0).

Ďalej dokážeme, že množina U spĺňa aj druhý predpoklad v tom princípe indukcie. Nech $k \in N_0$. Dokážeme, že ak $k \in U$, tak aj $k+1 \in U$. Pre $k \leqq m-2$ je to zrejmé. Pre $k = m-1$ to vyplýva z predpokladu 1. tejto vety. Ak napokon $k \geqq m$, tak to vyplýva z predpokladu 2. vety. Na základe princípu indukcie pre N_0 platí $U = N_0$. Keďže množiny na pravej strane v (1) sú disjunktné, vyplýva z (1) rovnosť $M = \{n \in M;\ \varphi(n)\}$, takže platí tvrdenie vety.

Veta I′ má široké uplatnenie v učive matematiky na strednej škole, a preto sa tu ňou netreba podrobne zaoberať. Treba len znova zdôrazniť, že metóda dôkazu matematickou indukciou obsiahnutá vo vete I resp. I′, je vlastne bezprostredným dôsledkom princípu indukcie.

Poznamenajme, že metódu dôkazu matematickou indukciou používame aj pri dokazovaní tzv. zovšeobecnených aritmetických zákonov (napr. distributívneho zákona pre celé čísla, pozri [5], s. 20—21).

Metóda vyložená vo vetách I a I′ sa niekedy nazýva aj prvým tvarom matematickej indukcie. Vysvetlíme teraz pojem druhého tvaru matematickej indukcie. Ide tu vlastne o aplikáciu princípu transfinitnej indukcie na nejakú časť dobre usporiadanej množiny N_0.

Prv než by sme pristúpili k princípu transfinitnej indukcie, urobíme malú metodickú poznámku.

Preformulujme princíp indukcie pre množinu N_0 pomocou pojmu bezprostredného nasledovníka. Ak $(A, <)$ je usporiadaná množina a $x \in A$, tak prvok $x' \in A$ sa nazýva bezprostredným nasledovníkom prvku x, ak $x < x'$ a množina $\{y \in A\,;\, x < y,\, y < x'\}$ je prázdna. Z tejto definície a z definície dobre usporiadanej množiny ihneď vyplýva, že ak $(A, <)$ je dobre usporiadaná množina a $x \in A$ nie je posledný prvok množiny A, tak v množine A existuje bezprostredný nasledovník prvku x. Pomocou pojmu bezprostredného nasledovníka možno preformulovať princíp indukcie pre množinu N_0 do nasledujúceho tvaru, ktorý je ekvivalentný s pôvodným tvarom:

Nech množina $U \subset N_0$ má tieto vlastnosti:

1′. Prvý prvok množiny N_0 patrí do U.

2′. Pre každé $a \in N_0$ platí: ak $a \in U$, tak aj bezprostredný nasledovník prvku a patrí do U.

Potom $U = N_0$.

Mohlo by sa zdať, že platnosť princípu indukcie pre N_0 v tejto podobe bude možné rozšíriť na ľubovoľnú dobre usporiadanú množinu, teda, že bude platiť tento výsledok:

Nech $(A, <)$ je dobre usporiadaná množina. Nech množina $U \subset A$ má tieto vlastnosti:

1″. Prvý prvok množiny A patrí do U.

2″. Pre každé $x \in A$ platí: ak $x \in U$ a $x' \in A$ je bezprostredný nasledovník prvku x, tak aj $x' \in U$.

Potom $U = A$.

Ukážeme na príklade, že predošlé tvrdenie neplatí.

Príklad 1. Nech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ je nekonečná spočítateľná množina ($a_j \neq a_k$ pre $j \neq k$). Usporiadajme množinu A tak, že poradie prvkov bude dané takto:

$$a_1, a_3, \ldots, a_{2k-1}, \ldots; \quad a_2, a_4, \ldots, a_{2k}, \ldots$$

(t. j.: $a_{2j-1} < a_{2l-1}$, $a_{2j} < a_{2l}$, ak $j < l$ a pre každé $k \in N$, $s \in N$ platí $a_{2k-1} < a_{2s}$).

Ľahko možno overiť, že množina $(A, <)$ je dobre usporiadaná. Položme $U = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2k-1}, \ldots\}$. Potom zrejme platí 1″. Ďalej dokážeme, že platí 2″. Nech $x \in A$ a x' je bezprostredný nasledovník prvku x. Dokážeme platnosť implikácie

$$x \in U \Rightarrow x' \in U \tag{2}$$

Ak $x = a_{2j-1}$ pre nejaké $j \in N$, tak správnosť implikácie (2) vyplýva z definície množiny U. Ak $x = a_{2s}$ pre nejaké $s \in N$, tak implikácia (2) platí, keďže výrok $x \in U$ je nepravdivý.

Teda množina U spĺňa predpoklady 1″, 2″, no napriek tomu neplatí rovnosť $U = A$. Vec sa dá napraviť tak, že predpoklad 2″ nahradíme iným (silnejším) predpokladom (pozri [5], s. 213). Dostaneme tak nasledujúci princíp transfinitnej indukcie pre dobre usporiadanú množinu.

Nech M je dobre usporiadaná množina, nech x_0 je jej prvý prvok. Nech množina $H \subset M$ má tieto vlastnosti:

1°. $x_0 \in H$

2°. Pre každé $y \in M$, $y > x_0$ platí: ak každý prvok $x \in M$, $x < y$ patrí do H, tak aj $y \in H$.

Potom $H = M$.

Dôkaz. Nech $H \neq M$. Potom $M - H \neq \emptyset$ a $M - H \subset M$. Keďže množina M je dobre usporiadaná, množina $M - H$ má prvý prvok. Označme ho znakom y_0. Potom

$$y_0 \notin H \tag{3}$$

takže $x_0 \neq y_0$, teda $x_0 < y_0$. Na základe definície prvku y_0 platí: implikácia $x \in M$, $x < y_0 \Rightarrow x \in H$. No potom na základe 2° platí

$$y_0 \in H \tag{3'}$$

Výroky (3), (3′) dávajú spor.

Poznámka. Všimnite si, že predpoklady 1° a 2° v predošlom princípe transfinitnej indukcie možno nahradiť týmto jediným predpokladom:

Pre každé $y \in M$ platí: ak každý prvok $x \in M$, $x < y$ patrí do H, tak aj $y \in H$.

Z princípu transfinitnej indukcie ihneď vyplýva nasledujúca veta.

Veta II. Nech $(M, <)$ je dobre usporiadaná množina a nech x_0 je jej prvý prvok. Nech $\varphi(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine M s týmito vlastnosťami:

1. Výrok $\varphi(x_0)$ platí.

2. Pre každé $y \in M$, $y > x_0$ platí; ak výrok $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in M$, $x < y$, tak aj výrok $\varphi(y)$ platí.

Potom $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in M$.

Dôkaz. Položme $H = \{x \in M ; \varphi(x)\}$. Potom z predpokladu vety II ihneď vyplýva, že množina H spĺňa predpoklady 1°, 2° v princípe transfinitnej indukcie, a preto $H = M$. To je však len iná formulácia tvrdenia vety.

Je známe, že každá časť dobre usporiadanej množiny je dobre usporiadaná. Preto aj každá časť množiny N_0 je dobre usporiadaná a z vety II ihneď dostávame nasledujúcu vetu (tzv. druhý tvar matematickej indukcie).

Veta II'. Nech $\emptyset \neq A \subset N_0$ a nech a_0 je prvý prvok množiny A. Nech $\varphi(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine A s vlastnosťami:

1. Výrok $\varphi(a_0)$ platí.

2. Pre každé $a \in A$, $a > a_0$ platí: ak pre každé $x \in A$, $x < a$ platí výrok $\varphi(x)$, tak platí aj výrok $\varphi(a)$.

Potom výrok $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in A$.

Uvedieme teraz niektoré typické aplikácie vety II'.

Najprv pomocou vety II' dokážeme známu vetu o rozklade prirodzeného čísla väčšieho než 1 na súčin prvočísel (pozri [9], s. 55, 56).

Dohovor: Každé prvočíslo pokladáme za súčin prvočísel s jediným činiteľom.

Veta 1. Každé prirodzené číslo väčšie než 1 je súčinom prvočísel.

Dôkaz. Pri označení vety II' položme $a_0 = 2$, $A = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Nech $\varphi(x)$ znamená pre $x \in A$ výrok: Číslo x je súčin prvočísel.

Zrejme $\varphi(a_0)$ platí (vďaka nášmu dohovoru).

Nech $a > a_0$, $a \in A$ a nech $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in A$, $x < a$. Ak a je prvočíslo, tak $\varphi(a)$ platí vďaka dohovoru. Ak a je zložené číslo, tak existujú také prirodzené čísla b, c, $1<b<a$, $1<c<a$, že

$$a=b\cdot c \tag{4}$$

Na základe indukčného predpokladu je každé z čísel b, c súčinom prvočísel. No potom zo (4) vidno, že aj číslo a je súčinom prvočísel. Na základe vety II′ dostaneme správnosť tvrdenia vety.

Ako ďalšiu aplikáciu vety II′ dokážeme vetu o vyjadriteľnosti prirodzených čísel väčších než 6 v tvare súčtu navzájom rôznych prvočísel (pozri Dôsledok za vetou 2). Dôraz kladieme na slovo *rôznych* prvočísel. Bez toho by bola úloha triviálna, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 2. Dokážte, že každé prirodzené číslo väčšie než 1 je súčet prvočísel 2, 3 (podotýkame, že pripúšťame aj súčet s jediným sčítancom).

Riešenie. Každé prirodzené číslo $m>1$ má tvar $2k-1$ ($k\geqq 2$), alebo $2k$ ($k\geqq 1$). V prvom prípade $m=2k-1=2(k-2)+3$ (teda m je súčet $k-2$ dvojek a trojky), v druhom prípade $m=2k$, je m súčet k dvojek.

Nasledujúca veta je slabšou verziou Richertových a Brownových výsledkov z additívnej teórie čísel (pozri [2]; [7], s. 144). Naša verzia dôkazu nasledujúcej vety je odlišná od verzie obsiahnutej v článku [1].

Veta 2. Každé prirodzené číslo väčšie než 9 je súčet navzájom rôznych nepárnych prvočísel.

Dôkaz. Priamym výpočtom sa možno presvedčiť o tom, že každé prirodzené číslo a, $10\leqq a\leqq 26$ je súčet navzájom rôznych prvočísel. Vyplýva to z nasledujúcich rovností:

$$\begin{gathered}10=3+7,\ 11=11,\ 12=5+7,\ 13=13,\ 14=3+11,\\ 15=3+5+7,\ 16=3+13,\ 17=17,\ 18=5+13,\ 19=19,\\ 20=3+17,\ 21=3+5+13,\ 22=3+19,\ 23=23,\ 24=5+19,\\ 25=3+5+17,\ 26=3+23\end{gathered} \tag{5}$$

Pri označení vety II′ položme $a_0=27$, $A=\{27, 28, \ldots\}$.

Nech $\varphi(x)$ označuje výrok: Číslo x je súčet navzájom rôznych nepárnych prvočísel.

Potom $\varphi(a_0)$ platí (pozri predpoklad 1. vo vete II′), lebo $27=$ $=3+5+19$.

K dôkazu indukčného kroku 2. vo vete II′ použijeme verziu Bertrandovho postulátu z článku [1]:

Pre každé $n \geqq 14$ platí: medzi číslami n a $2n-10$ leží aspoň jedno prvočíslo.

Nech $a > a_0$ a nech $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in A$, $x < a$. Keďže $a > 27$, platí $\frac{a-10}{2} + 5 \geqq 14$. Na základe spomínaného výsledku z [1] existuje také (nepárne) prvočíslo p, že

$$\frac{a-10}{2} + 5 < p < 2\left(\frac{a-10}{2} + 5\right) - 10 = a - 10 < a \tag{6}$$

Z toho vyplýva $a - p > a - (a - 10) = 10$.

Preto na základe indukčného predpokladu a rovností (5) existujú také nepárne prvočísla $p_1 < \ldots < p_r$, že $a - p = p_1 + \ldots + p_r$.

Z toho dostaneme:

$$a = p_1 + \ldots + p_r + p \tag{7}$$

Ak by platilo $p_r \geqq p$, tak zo (7) na základe (6) by sme dostali $a \geqq 2p > a$, čo dáva spor.

Preto $p_r < p$ a (7) ukazuje, že platí výrok $\varphi(a)$.

Ak by $\frac{a-10}{2}$ nebolo celé číslo, tak by sme predchádzajúci postup modifikovali takto: Z toho, že $\frac{a-10}{2}$ nie je celé číslo, vyplýva, že $\frac{a-9}{2}$ je celé. Ďalej $\frac{a-9}{2} + 5 > \frac{a-10}{2} + 5 \geqq 14$. Preto na základe citovaného výsledku z práce [1] existuje také (nepárne) prvočíslo p, že

$$\frac{a-9}{2} + 5 < p < 2\left(\frac{a-9}{2} + 5\right) - 10 = a - 9 < a \tag{8}$$

No a potom $a - p > 9$, teda $a - p \geqq 10$. Na základe indukčného predpokladu a (5) existujú také nepárne prvočísla $q_1 < \ldots < q_s$, že $a - p = q_1 + \ldots + q_s$.

Z toho vyplýva:

$$a = q_1 + \ldots + q_s + p \tag{9}$$

Ak by bolo $p \leqq q_s$, tak z (9) na základe (8) by sme dostali $a \geqq 2p > a - 9 + 10 = a + 1$ — spor.

Preto $q_s < p$ a (9) ukazuje, že platí $\varphi(a)$.

Tým je dôkaz vety skončený.

Dôsledok. Z vety 2 ihneď vyplýva, že každé prirodzené číslo väčšie než 6 je súčet navzájom rôznych prvočísel, keďže $7=7$, $8=3+5$, $9=2+7$.

Teraz ukážeme aplikáciu vety II′ na prípad, keď (pri označení vety II′) aj A aj $N_0 - A$ sú nekonečné množiny.

Je známe, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $4k+1$ $(k \geqq 1)$ i nekonečne veľa prvočísel tvaru $4k+3$ $(k \geqq 0)$ (pozri [7] s. 203 až 204). Označme znakom A množinu všetkých tých prirodzených čísel väčších než 1, v kanonickom rozklade ktorých vystupujú len prvočísla tvaru $4k+1$ $(k \geqq 1)$. Potom podľa predošlého je A nekonečná množina a $N - A$ je tiež nekonečná množina.

Veta 3. Každé číslo z množiny A sa dá vyjadriť ako súčet dvoch kvadrátov celých čísel.

Na dôkaz použijeme nasledujúci pomocný výsledok (pozri [7], s. 205):

Lema 1. Každé prvočíslo tvaru $4k+1$ $(k \geqq 1)$ je súčet dvoch kvadrátov celých čísel.

Dôkaz vety 3. Pri označení vety II′ položme $a_0 = 5$, A má predošlý význam (formulovaný v znení vety 3). Nech $\varphi(x)$ znamená pre $x \in A$ výrok: Číslo x je súčet dvoch kvadrátov celých čísel.

Potom predpoklad 1 vo vete II′ je splnený, lebo $5 = 2^2 + 1^2$.

Nech $a \in A$, $a > a_0$ a nech $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in A$, $x < a$. Dokážeme, že aj $\varphi(a)$ platí.

Ak a je prvočíslo, tak $\varphi(a)$ platí na základe lemy 1.

Ak a nie je prvočíslo, tak $a = p_1 \dots p_r$, $r \geqq 2$, p_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ sú prvočísla tvaru $4k+1$. Položme $b = p_1$, $c = p_2 \dots p_r$. Potom $a = b \cdot c$, b, $c \in A$, b, $c < a$.

Na základe predpokladu existujú také celé čísla x, y; x_1, y_1, že $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = x_1^2 + y_1^2$.

No potom platí $a = b \cdot c \;=\; (x^2 + y^2)\;(x_1^2 + y_1^2) \;=\; (xx_1 + yy_1)^2 + (xy_1 - yx_1)^2$.

Z toho vyplýva, že platí $\varphi(a)$. Na základe vety II′ výrok $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in A$. Tým je dôkaz vety skončený.

Napokon podáme aplikáciu vety II′ na dôkaz vyjadriteľnosti racionálneho čísla v tvare súčtu tzv. kmeňových zlomkov (t.j. zlomkov, ktorých čitatele sa rovnajú číslu 1). Všimnite si, že pri dôkaze nasledujúcej vety použijeme vetu II′ v prípade, keď množina A (pozri označenie z vety II′) bude konečná.

Veta 4. Každé racionálne číslo $\frac{r}{s} \in (0, 1)$, kde r, s sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, možno vyjadriť v tvare

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_k}, \quad k \geqq 1 \tag{10}$$

$q_1 < \ldots < q_k$ sú prirodzené čísla, q_j je deliteľné číslom q_{j-1} $(j = 2, \ldots, k)$.

Dôkaz. Veta zrejme platí pre $s = 2$. Predpokladajme, že $m > 2$ a nech veta platí pre každé s, $2 \leqq s < m$. Dokážeme, že platí aj pre $s = m$.

Označme znakom $A = A_m$ množinu všetkých tých prirodzených čísel r, ktoré sú nesúdeliteľné s m a $1 \leqq r < m$.

Zrejme $1 \in A_m$. Pre $x \in A_m$ nech $\varphi(x)$ označuje výrok: Číslo $\frac{x}{m}$ má tvar (10).

Potom zrejme $\varphi(1)$ platí (teda je splnený predpoklad 1 vo vete II′).
Nech $a \in A_m$, $a > 1$ a nech pre každé $x \in A_m$, $x < a$ platí $\varphi(x)$.

Z vety o delení so zvyškom (pozri [9] s. 22 až 23) vyplýva, že číslo m možno vyjadriť v tvare

$$m = a \cdot q - z \tag{11}$$

kde q, z sú celé nezáporné čísla,

$$0 \leqq z < a \tag{12}$$

Keďže čísla m, a sú nesúdeliteľné, musí byť $z > 0$. Ďalej keďže $m > a$, musí byť $q > 1$. No potom na základe (11) dostaneme

$$\frac{a}{m} = \frac{aq}{mq} = \frac{m+z}{mq} = \frac{1}{q}\left(1 + \frac{z}{m}\right) \tag{13}$$

Nech $\frac{z'}{m'}$ je redukovaný tvar zlomku $\frac{z}{m}$ (teda z', m' sú nesúdeliteľné prirodzené čísla). Ak $m = m'$ (vtedy $z = z'$), tak na základe indukčného predpokladu (pozri (12)) dostaneme:

$$\frac{z'}{m'} = \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_k}; \quad k \geqq 1 \tag{14}$$

$t_1 < \ldots < t_k$ sú prirodzené čísla a t_j je deliteľné číslom t_{j-1} ($j=2, \ldots, k$).

No potom z (13) a (14) vyplýva $\frac{a}{m} = \frac{1}{q} \frac{1}{qt_1} + \ldots + \frac{1}{qt_k}$ a z predošlého vidno, že platí $\varphi(a)$.

Ak $m' < m$, tak na základe indukčného predpokladu, ktorý sme urobili na začiatku dôkazu, má zlomok $\frac{z'}{m'}$ vyjadrenie typu (14) a ďalej postupujeme ako prv.

Teda na základe vety II′ výrok $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in A_m$. Opätovným použitím vety II′ dostaneme tvrdenie vety. Tým je dôkaz vety skončený.

Literatúra

1. Dressler, R. F.: A stronger Bertrand's postulate with an application to partitions. Proc. Amer. Math. Soc., *33*, 1972, 226—228.
2. Brown, J. L.: Generalization of Richert's theorem. Amer. Math. Monthly, *83*, 1976, 631—634.
3. Lenz, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1961.
4. Šalát, T.: Teoretická aritmetika (vysokoškolské skriptum). Bratislava, UK 1976.
5. Birkhoff, G.—MacLane, S.: Przeglad algebry wspólczesnej. Warszawa, PWN 1966.
6. Kuratowski, K.—Mostowski, A.: Teoria mnogości. Warszawa, PWN 1966.
7. Sierpiński, W.: Elementary Theory of Numbers. Warszawa, PWN 1964.
8. Medek, V.—Mišík, L.—Šalát, T.: Repetitórium stredoškolskej matematiky. 1. vyd. Bratislava, Alfa 1975.
9. Znám, Š.: Teória čísel. 1. vyd. Bratislava, Alfa 1977.
10. Vrba, A.: Princip matematické indukce. ÚV Matem. olympiády. 1. vyd. Praha, Mladá Fronta 1977.