DIFERENCOVANE O DIFERENCOVANÍ

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

Občas sa znovu môžeme stretnúť s otázkou: Načo na strednej škole vyučovať diferenciálny a integrálny počet, keď na vysokej škole ho aj tak treba prebrať znovu? Tento článok chce byť jednou z kompromisných odpovedí na uvedenú otázku: Na rozdiel od vysokej školy predsa na strednej škole postačí o diferenciálnom počte (na ktorý sa v tomto článku obmedzujeme) prvá informácia.

Pravdu povediac text naznačený v tomto článku považujeme skôr za nultú informáciu, keď za prvú by sme chceli označiť skôr to, čo sme vtesnali do učebnice [1], či do jej experimentálnej novelizácie [3]. (Niet tu asi vhodnej atmosféry na to, aby sme sa priznali, že sme uvažovali aj o informácii mínus prvej.)

Aj predložený text má svoj experimentálny účel. Jeho podstatná časť bola zahrnutá do experimentálnej učebnice [2]. Mnohé zo spomenutej učebnice tu reprodukujeme. Robíme tak jednak preto, že experimentálny materiál [2] má predsa len menšiu publicitu a ide nám trochu o jeho širšie posúdenie, jednak preto, že osud experimentálnych učebníc vôbec a tejto diferenciálnej vsuvky osobitne je veľmi neistý. Veríme, že naša *nultá* informácia si nájde aspoň kde-tu svojich priaznivcov. Okrem toho v časti venovanej aplikáciám uvádzame ako alternatívu novú aplikáciu (približné riešenie rovníc), keďže pôvodný zámer (použitie diferenciálneho počtu na skúmanie priebehu funkcií) sa v [2] de facto nepodarilo realizovať. V predloženej verzii sú obidve aplikácie od seba nezávislé.

Dotyčnica k parabole

Vieme, že každá lineárna funkcia s definičným oborom R je daná rovnicou

$$y = ax + b \tag{1}$$

kde a, b sú reálne čísla, $a \neq 0$. Predstavme si, že o istej lineárnej funkcii f vieme, čomu sa rovná a, a poznáme jeden jej prvok $[x_0, y_0]$. Je týmito údajmi funkcia f jednoznačne určená?

V rovnici (1) je neznáme číslo b. To však môžeme ľahko určiť. Dosadíme za x číslo x_0, za y číslo y_0 a dostaneme $y_0 = ax_0 + b$; odtiaľ $b = y_0 - ax_0$. Každá lineárna funkcia s definičným oborom R je jednoznačne určená koeficientom a a jedným svojím prvkom.

Rovnicu (1) môžeme vyjadriť v tvare

$$y = ax + y_0 - ax_0$$

čiže

$$y - y_0 = a(x - x_0) \tag{2}$$

Namiesto „lineárna funkcia f je daná rovnicou (2)" sa používa úslovie „priamka (ktorá je grafom funkcie f) má rovnicu (2)", resp. „priamka s rovnicou (2)", resp. „priamka je daná (určená) rovnicou (2)". Číslo a nazývame smernicou príslušnej priamky. Aký je geometrický význam smernice? Zvoľme na danej priamke ešte jeden bod $[x_1, y_1] \neq [x_0, y_0]$. Potom

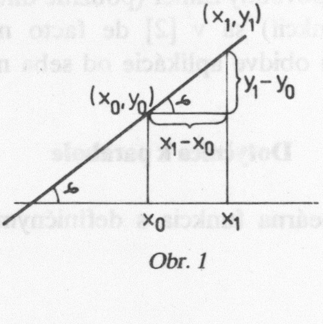
$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

odkiaľ odčítaním dostaneme

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$$

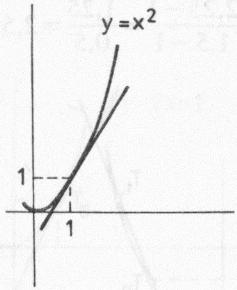
teda (*obr. 1*)



Obr. 1

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi$$

A teraz sa venujme riešeniu tejto úlohy: K parabole $y = x^2$ (t. j. ku grafu funkcie s rovnicou $y = x^2$) chceme nájsť dotyčnicu v bode [1, 1] (*obr. 2*). Čo máme k dispozícii? Priamka, ktorá prechádza bodom $T_0 = [x_0, y_0]$



Obr. 2

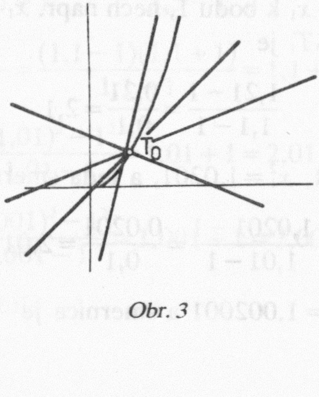
so smernicou a má rovnicu

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Bod $[x_0, y_0]$ poznáme: je to bod [1, 1], teda $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

$$y - 1 = a(x - 1)$$

Treba ešte určiť smernicu a. Pre rôzne smernice dostávame rôzne

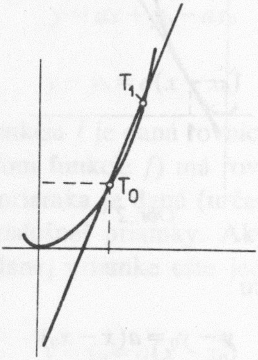


Obr. 3

priamky, ale len jedna z nich je tá „pravá“ (*obr. 3*). Ako ju nájsť v takom množstve priamok?

Na parabole $y = x^2$ zvolíme ešte nejaký ďalší bod $T_1 = [x_1, y_1]$, napr. $[1{,}5, 2{,}25]$. K dispozícii máme ešte jeden poznatok: priamka T_0T_1 má smernicu $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Pre $x_1 = 1{,}5$, $y_1 = (1{,}5)^2 = 2{,}25$ dostávame smernicu

$$\frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$



Obr. 4

To však nie je hľadaná smernica. Už na prvý pohľad vidieť (*obr. 4*), že priamka T_0T_1 (s rovnicou $y - 1 = 2{,}5(x - 1)$) je príliš „vzdialená“ od našej dotyčnice.

Skúsme priblížiť bod x_1 k bodu 1, nech napr. $x_1 = 1{,}1$. Potom $x_1^2 = 1{,}21$ a smernica priamky T_0T_1 je

$$\frac{1{,}21 - 1}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}21}{0{,}1} = 2{,}1$$

V prípade, že $x_1 = 1{,}01$, $x_1^2 = 1{,}0201$, a teda smernica je

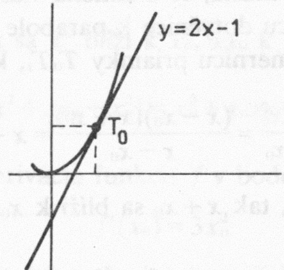
$$\frac{1{,}0201 - 1}{1{,}01 - 1} = \frac{0{,}0201}{0{,}1} = 2{,}01$$

Ak $x_1 = 1{,}001$, tak $x_1^2 = 1{,}002001$ a smernica je

$$\frac{1{,}002001-1}{1{,}001-1}=\frac{0{,}002001}{0{,}001}=2{,}001$$

Vidíme, že smernica sa nezadržateľne blíži k dvom. Ani jedna z uvedených smerníc však nie je smernicou dotyčnice. Smernicou dotyčnice je číslo $a=2$. Rovnica dotyčnice má teda tvar (*obr. 5*)

$$y-1=2(x-1)$$



Obr. 5

Skôr, ako prejdeme k ďalším úlohám, všimneme si, že predchádzajúce výpočty sme si mohli uľahčiť použitím vzťahu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Teda napr.

$$\frac{2{,}25-1}{1{,}5-1}=\frac{1{,}5^2-1^2}{1{,}5-1}=\frac{(1{,}5-1)(1{,}5+1)}{1{,}5-1}=1{,}5+1=2{,}5$$

$$\frac{(1{,}1)^2-1^2}{1{,}1-1}=\frac{(1{,}1-1)(1{,}1+1)}{1{,}1-1}=1{,}1+1=2{,}1$$

$$\frac{(1{,}01)^2-1^2}{1{,}01-1}=1{,}01+1=2{,}01$$

$$\frac{(1{,}001)^2-1^2}{1{,}001-1}=1{,}001+1=2{,}001$$

Všeobecne pre $x\neq 1$ platí

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

Ak sa teda x blíži k číslu 1, t. j. priamka T_0T_1 k dotyčnici, blíži sa jej smernica k číslu $1+1=2$. V matematike sa toto „blíženie" zvyčajne označuje, možno povedať, názorným spôsobom

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

kde lim je skratka slova limita, čo znamená vlastne hranicu.

Príklad. Nájdite rovnicu dotyčnice k parabole $y=x^2$ v bode $[x_0, x_0^2]$.

Najskôr vypočítame smernicu priamky T_0T_1, kde $T_1=[x, x^2]$, $x\neq x_0$:

$$\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=x+x_0$$

Ak sa x blíži k bodu x_0, tak $x+x_0$ sa blíži k x_0+x_0, t. j. k $2x_0$. Učene zapísané

$$a=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0$$

Rovnica dotyčnice k parabole $y=x^2$ v bode $[x_0, x_0^2]$ preto bude

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$$

V tejto chvíli bude dobre nechať žiakov samostatne počítať podobné príklady, aby sa vzápätí dej mohol posunúť o kus dopredu.

Derivácia polynomickej funkcie

Polynomickou funkciou nazývame funkciu, ktorá je daná rovnicou

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

kde n je ľubovoľné nezáporné celé číslo, $a_0, \ldots, a_n$ sú reálne čísla. Derivácia je číslo, pomocou ktorého sme hľadali dotyčnice. Je to smernica dotyčnice. Pojem derivácie sa neobmedzuje len na funkciu $y=x^2$, deriváciu možno zaviesť aj pre iné funkcie.

Derivácia funkcie f v čísle x_0 je číslo

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(ak sa, pravda, ten podiel vôbec k niečomu blíži).

Príklad. Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon y=x^3$ v čísle x_0. Upravíme podiel

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}==x^2+xx_0+x_0^2 \qquad (x\neq x_0)$$

Ak sa k blíži k x_0, tak sa x^2 blíži k x_0^2, xx_0 k x_0^2, teda

$$\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=x_0^2+x_0x_0+x_0^2=3x_0^2$$

Tým sme vypočítali deriváciu funkcie f v bode x_0:

$$f'(x_0)=3x_0^2$$

Na výpočet derivácie ľubovoľnej polynomickej funkcie stačia tieto tri pravidlá:

1. Nech $f\colon y=x^n$, $n\in N$. Potom pre každé $x_0\in R$ platí

$$f'(x_0)=n\,.\,x_0^{n-1}$$

2. Nech f, g sú polynomické funkcie s definičným oborom R, pre ktoré platí: pre každé $x_0\in R$ platí $g(x_0)=c\,.\,f(x_0)$. Potom

$$g'(x_0)=c\,.\,f'(x_0)$$

3. Nech f, g, h sú polynomické funkcie také, že $h(x_0)=f(x_0)+g(x_0)$. Potom

$$h'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Pravidlá 1 až 3 možno uložiť lepším žiakom ako nepovinnú, prémiovú domácu úlohu.

Príklad. Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon y=x^3+6x^2+9x-16$ v čísle x_0.

Podľa tretieho pravidla (derivácia súčtu sa rovná súčtu derivácií) stačí postupne vypočítať derivácie funkcií

$$y=x^3, y=6x^2, y=9x, y=-16$$

Konštanty nás nemýlia, pretože podľa druhého pravidla ich možno „vyňať pred deriváciu", teda napr.

$$(6x_0^2)'=6(x_0^2)'=6.2x_0=12x_0$$

V prípade lineárnej funkcie $y=9x$ si stačí uvedomiť, že priamka, ktorá je jej grafom, je dotyčnicou sama k sebe; teda derivácia funkcie $y=9x$ v čísle x_0 (čiže smernica priamky $y=9x$) je číslo 9.

Grafom funkcie $y=-16$ je priamka rovnobežná s osou x. Jej smernica sa rovná 0.

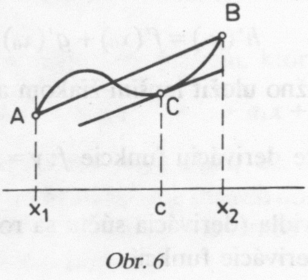
Spolu teda máme

$$f'(x_0)=(x_0^3)'+(6x_0^2)'+(9x_0)'+(-16)'=3x_0^2+12x_0+9$$

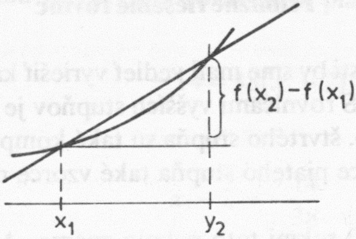
Derivácia a monotónnosť

Majme danú polynomickú funkciu f s definičným oborom R a dve reálne čísla x_1, x_2, $x_1<x_2$. Spojme body $A=[x_1, f(x_1)]$, $B=[x_2, f(x_2)]$ úsečkou (*obr. 6*). Vidíme, že existuje aspoň jedno také číslo $c\in(x_1, x_2)$, pre ktoré je dotyčnica ku krivke f v bode $C=[c, f(c)]$ rovnobežná s úsečkou AB. (Takých bodov môže byť aj viac, na našom obrázku sú dva.) Pokúsme sa uvedený fakt opísať pomocou derivácie. Smernica priamky AB je číslo (*obr.* 7)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Obr. 6



Obr. 7

Smernica dotyčnice v bode C je číslo $f'(c)$. Dostávame teda tvrdenie:

Pre ľubovoľné reálne čísla x_1, x_2, také, že $x_1 < x_2$, existuje také $c \in (x_1, x_2)$, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Toto tvrdenie môžeme vhodne použiť pri skúmaní priebehu funkcií:

Ak má funkcia v každom bode intervalu (a, b) kladnú deriváciu, tak je v tomto intervale rastúca. Ak má v každom bode intervalu (a, b) zápornú deriváciu, tak je v tomto intervale klesajúca.

Skutočne, nech napr. funkcia f má v každom bode z intervalu (a, b) kladnú deriváciu. Nech x_1, x_2 sú prvky tohto intervalu, $x_1 < x_2$. Máme dokázať, že $f(x_1) < f(x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$$

teda $f(x_2) > f(x_1)$. Druhé tvrdenie sa dokáže podobne.

Príklad. Určte intervaly, v ktorých je funkcia $f: y = x^3 + 6x^2 + 9x - 16$ rastúca, resp. klesajúca.

Derivácia funkcie f v čísle x je

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3)$$

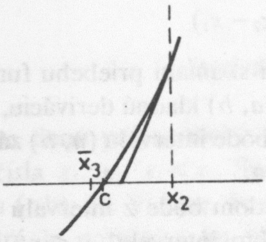
Riešením nerovnice $x^2 + 4x + 3 > 0$ ľahko zistíme, že $f'(x) > 0$ práve vtedy, keď $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$, $f'(x) < 0$ práve vtedy, keď $x \in (-3, -1)$. Dospeli sme k záveru:

Funkcia f je rastúca v intervaloch $(-\infty, -3)$, $(-1, \infty)$, klesajúca v intervale $(-3, -1)$.

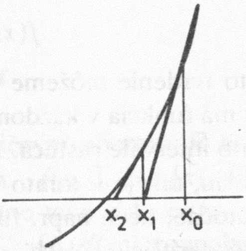
Približné riešenie rovníc

Pri troche pozornosti by sme mali vedieť vyriešiť každú lineárnu a každú kvadratickú rovnicu. S rovnicami vyšších stupňov je to horšie. Vzorce pre rovnice tretieho, resp. štvrtého stupňa sú také komplikované, že ich nikto nepoužíva. Pre rovnice piateho stupňa také vzorce neexistujú a ani nikdy existovať nebudú.

Pravdaže, pred 300 rokmi toto nebolo známe. Ale už vtedy Newton vynašiel spôsob, ako sa dajú rovnice tvaru $f(x)=0$ riešiť približne. Myšlienka je jednoduchá: Namiesto krivky $y=f(x)$ pracovať s jej dotyčnicou (*obr. 8*). Nie je chyba, ak na prvý raz nedostaneme koreň. Celý postup môžeme niekoľkokrát zopakovať (*obr. 9*).



Obr. 8



Obr. 9

Príklad. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f: $y=x^4+x^3-x^2-2x-2$ v bode [2, ?] a nájdite priesečník tejto dotyčnice s x-ovou osou.

Pretože $x_0=2$, máme $y_0=f(x_0)=2^4+2^3-2^2-2.2-2=14$. Ďalej

$$f'(x_0)=4x_0^3+3x_0^2-2x_0-2$$

teda pre smernicu a platí

$$a=f'(2)=4.8+3.4-2.2-2=38$$

Hľadaná rovnica dotyčnice:

$$y-y_0=a(x-x_0)$$
$$y-14=38(x-2)$$

V jej priesečníku $[x_1, y_1]$ s x-ovou osou platí $y_1=0$. Pre súradnicu x_1 máme preto

$$-14=38(x_1-2)$$

teda

$$x_1-2=-\frac{14}{38}$$

$$x_1=2-\frac{14}{38}=1{,}63\ldots$$

Príklad. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x_0, ?]$ a nájdite priesečník $[x_1, 0]$ tejto dotyčnice s x-ovou osou.

Ako sme už aj skôr videli, rovnica dotyčnice v bode $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y-y_0=a(x-x_0)$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

V priesečníku dotyčnice s osou x platí $y_1=0$, teda

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

$$x_1-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dostali sme vzorec aj pre prípadné opakovanie celého postupu. Ak v bode $[x_1, f(x_1)]$ zostrojíme dotyčnicu, tak pre jej priesečník $[x_2, 0]$ s osou x zrejme platí

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

pri ďalšom opakovaní

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

atď. Ak budeme mať trochu šťastia, môžeme sa takto dostať ku koreňu. A keď aj nie na koreň, aspoň do jeho blízkosti.

Príklad. Nájdite približne koreň rovnice $x^4+x^3-x^2-2x-2=0$ ležiaci v intervale (1, 2).

To, že v intervale (1, 2) naozaj leží nejaký koreň vyplýva z toho, že $f(1)=-3<0$, $f(2)=14>0$. Prvé priblíženie nám dal príklad 4:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{14}{38}\doteq 1{,}63$$

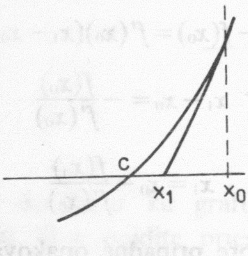
Ďalej máme

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1{,}63-\frac{3{,}47}{20{,}03}\doteq 1{,}45$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1{,}45-\frac{0{,}46}{12{,}86}=1{,}414247\ldots$$

Zaokrúhlenie $\bar{x}_3=1{,}4142$ vedie k zaujímavému úkazu:

$$f(1{,}4142)=-0{,}000169$$



Obr. 10

To je podozrivé: zaokrúhlením (*obr. 10*) sme koreň asi preskočili. Ale $f(1{,}41424)=0{,}00033$. Vidíme, že skutočný koreň leží medzi týmito dvoma hodnotami

$$1{,}4142<c<1{,}41424$$

Chyba, ktorej sa dopustíme, ak namiesto c použijeme 1,41424, je teda menšia ako 0,0005. Nakoniec prezraďme čitateľovi, že koreňom danej rovnice (ako sa sám ľahko môže presvedčiť) je $\sqrt{2}$.

Literatúra

[1] Riečan, B.—Vaňatová, L.: Matematika pre gymnáziá 7, SPN Bratislava, Praha 1980.
[2] Odvárko, O. a kol.: Matematika, exp. učebný text pre 2. roč. gymnázia, 2. časť, SPN Praha, Bratislava 1980.
[3] Riečan, B. a kol.: Matematika, exp. učebný text pre 3. roč. gymnázia, 2. časť, SPN Bratislava, Praha 1981.