

O MATEMATICKEJ KULTÚRE UČITEĽA MATEMATIKY

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Úvahy, ktoré tu predkladám, sú výsledkom zamyslenia sa pri rôznych príležitostach (v dennej práci, pri príprave referátu na Krajskú konferenciu o vyučovaní matematiky v Nitre v roku 1982 pri práci spojenej na riešení rezortnej výskumnej úlohy RŠ-V-14/1 a pod.).

Matematickou kultúrou učiteľa matematiky rozumiem istú vybavenosť učiteľa matematiky určitými schopnosťami a znalosťami v oblasti matematického vzdelania, ktorá umožňuje vykonávať funkciu učiteľa matematiky na výbornej úrovni. Podotýkam už teraz, že nemožno celú vec zredukovať na obsahovú prípravu učiteľa matematiky, dokonca by bolo nesprávne, ako uvidíme ďalej, matematickú kultúru učiteľa matematiky merať len *množstvom* jeho matematických poznatkov.

Aké sú zložky matematickej kultúry učiteľa matematiky? Veci, o ktorých bude reč, sa týkajú v podstate každého učiteľa matematiky bez prihliadnutia na to, na akom stupni školy pôsobí. No pre určitosť konkrétné situácie budem formulovať pre učiteľa strednej školy. Za zložky matematickej kultúry učiteľa matematiky pokladám: 1. matematické črty myslenia učiteľa, a to v najširšom zmysle slova (formatívna stránka pripravenosti učiteľa na výkon jeho funkcie). Sem patrí schopnosť samostatným štúdiom získavať nové poznatky v matematike, a tie na istej úrovni rozvíjať a aplikovať, ďalej schopnosť kombinovať matematické poznatky, viesť bežné úvahy, schopnosť formulovať jednoduché problémy, tie riešiť alebo aspoň navrhovať cesty riešenia, a tak získavať študentov pre tvorivé štúdium matematiky. Túto zložku matematickej kultúry učiteľa matematiky pokladám za rozhodujúcu. Keď predošlé aplikujeme na skúmanie charakteru učebných textov z matematiky, dostávame záver o neúčelnosti takej matematickej literatúry, ktorá sa zámerne vyhýba matematickým úvahám, špekulovaniu, ktorej ide len o akýsi aplikačný efekt matematických poznatkov daných takmer vo forme vyhlášok a nariadení.

Druhú zložku matematickej kultúry učiteľa matematiky tvorí dostatočná zásoba matematických poznatkov. Ide mi o primeraný rozsah matematických poznatkov. Primeranosť je vec individuálna, no zdôrazňujem ju preto, aby sa nevytvoril mylný dojem, že samotné hromadenie vedomostí dostatočne neprežitých a nestrávených aktívnym, tvorivým premýšľaním, môže vytvoriť matematickú kultúru učiteľa matematiky. Čoho sa tie poznatky majú týkať? Z hľadiska potrieb učiteľa matematiky strednej školy majú tvoriť akúsi nadstavbu, nadhľad nad školskou matematikou. Načo nadhľad? Iste by mohol jestovať učiteľ, ktorý by bol schopný vyučovať aj bez nadhľadu. No nie je vyučovanie ako vyučovanie. Iste je správna zásada, že školská matematika má na adekvátnej úrovni odrážať aj stav matematiky ako vedeckej disciplíny a poskytovať aj keď skromné, no predsa len akési uvedenie do štúdia matematiky ako vedeckej disciplíny. Spomínaný nadhľad pomáha realizovať predošlú zásadu. Ďalej vyššia vzdelanostná úroveň učiteľa pomáha mu lepšie posúdiť závažnosť jednotlivých partií školskej matematiky z hľadiska potrieb študenta v budúcnosti. Je načase zamyslieť sa nad vytvorením takej študijnej príručky, ktorá by pomáhala orientovať sa v nadhodenej problematike potrebného nadhľadu, ktorý by mal mať učiteľ matematiky strednej školy. Tažko možno totiž očakávať, že veci dobre pôjdu aj bez takej príručky. Nadhľad by mal vyústiť až do oblastí tvorivej vedeckej práce.

Treťou zložkou matematickej kultúry učiteľa matematiky môže byť jeho pripravenosť v oblasti didaktiky matematiky a pedagogicko-psychologickej vied, ovládanie hlavných didaktických zásad a schopnosť ich tvorivého uplatňovania v procese výučby matematiky.

Zdôrazňujem nenahraditeľnosť uvedených troch zložiek matematickej kultúry učiteľa matematiky. Vynechanie ktorejkoľvek z nich vedie k neplnohodnotnosti vyučujúceho.

Aké podmienky na realizovanie uvedených troch zložiek matematickej kultúry poskytuje súčasné učiteľské štúdium? Vytváranie 1. zložky u poslucháčov učiteľského smeru štúdia je predovšetkým otázkou kvality práce učiteľských fakúlt. Z hľadiska organizácie prípravy učiteľov možno s lútosťou konštatovať, že v prestavbových učebných plánoch neexistujú semináre z matematiky v 5. ročníku, pretože práve semináre z matematiky boli a sú tou organizačnou formou, v ktorej možno 1. zložku najúspešnejšie rozvíjať, kde možno študentov viesť k *tvorivému* myslению v matemati-

ke. Učebný plán vytvára predpoklady na realizáciu výchovy k nadobudnutiu zložiek 2. a 3. Učebný plán umožňuje získať základné poznatky z troch hlavných matematických disciplín: analýzy, algebry a geometrie, ďalej z numerickej matematiky, programovania, pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, pamäťa tiež na poučenie o základných problémoch v oblasti filozofie matematiky. Iná vec je, do akej miery učebný plán dáva dostatok priestoru na tvorivé prežívanie matematických poznatkov, ich rozvíjanie. V porovnaní s učebnými plánmi sovietskych pedagogických inštitútorov je v našom pláne predimenzovaný všeobecný základ a poddimenzovaný rozsah didaktík predmetov kombinácie (pozri [4], s. 437). To je dosť smutná skutočnosť, pretože tento stav nezodpovedá významu teórie vyučovania predmetov kombinácie pre prípravu nových učiteľov.

V ďalšom si pohovoríme o probléme sústavného a trvalého zabezpečovania rastu matematickej kultúry učiteľov matematiky. Nemožno reálne očakávať ani teraz, ani v budúcnosti, že by príprava učiteľov na vysokých školách bola schopná zabezpečiť dostatočnú úroveň matematickej kultúry absolventa až do konca jeho pôsobenia na škole Ak aj odhliadneme od potreby inovácie poznatkov, ktorá je v epoce vedecko-technickej revolúcie často zdôrazňovanou črtou vysokoškolského štúdia, tak už samotný život učiteľa, ktorý má rád svoje povolanie a svojich žiakov, ho vedie k tomu, aby neustále usiloval o rast svojej matematickej kultúry. To zabezpečuje, že takýto učiteľ sa stáva dokonalejším pomocníkom mladých ľudí, lepšie im rozumie, chápe ich, a preto je schopný ich vhodne usmerňovať. Neustále sebzdokonaľovanie učiteľa je nevyhnutnou podmienkou pre rast kvality jeho pedagogickej práce. Pritom nielen pre jeho žiakov, ale aj preňho samotného táto snaha prináša cenné výsledky. Predovšetkým mu prináša isté duševné uspokojenie, *čisté svedomie*, že urobil, čo bolo v jeho silách pri slabších výsledkoch študentov, prináša obyčajne zlepšenie výsledkov jeho práce v pedagogickom procese, čo ho iste napĺňa sebauspokojením. Učiteľ, ktorý sa sám intenzívne zdokonaľuje, je aj psychicky bližší študentom, lebo sám je študent. Ďalej jeho osobný príklad strháva žiakov k zanietenému štúdiu matematiky oveľa účinnejšie, než by sa to dalo docieliť najlepšími kazateľskými výkonomi.

Ako by malo vyzeráť toto sústavné sebzdokonaľovanie učiteľa matematiky? Ako si to sám predstavujem, to hodlám demonštrovať na konkrétnom príklade. Skúsenosti z PGŠ a rôznych foriem ďalšieho

vzdelávania učiteľov matematiky ukazujú, že najefektívnejšie sú tie formy, pri ktorých obsah ďalšieho vzdelávania, jeho orientácia je úzko spojená s bezprostrednými potrebami učiteľa v realizácii pedagogického procesu na strednej škole. Príklad, ktorý uvediem, plne rešpektuje tieto skúsenosti.

Predstavme si, že učiteľ matematiky preberá na strednej škole učivo o extrémoch reálnych funkcií jednej reálnej premennej. Vzniká otázka, ako vyzerá ideálne na toto učivo pripravený učiteľ. Domnievam sa, že taký učiteľ by mal spĺňať tieto podmienky:

a) dobre ovláda preberanú látku (po stránke vecnej a didaktickej) a má dobrý prehľad o rozmanitých aplikáciach učiva (pozná vhodné zbierky príkladov, prípadne sám vie formulovať vhodné situácie, v ktorých sa dá učivo aplikovať);

b) dobre pozná súvislosti učiva s inými časťami školskej matematiky (vlastnosti spojитých funkcií na kompaktných intervaloch, priebeh funkcií, vlastnosti derivácie funkcie a pod.);

c) je schopný oživiť v sebe spomienky na tú časť *nadhľadu*, ktorá sa týka preberaného učiva. Pod vplyvom tohto spomínania zväží postavenie učiva v štruktúre školskej matematiky a matematiky vôbec a uváží možnosti jeho využitia pri ďalšom sebazuďokonačovaní.

Tvorivo vyučujúci učiteľ sa môže zamýšľať nad preberanou látkou z metodického hľadiska, ak si napríklad všimne u svojich študentov sklon k mechanickému uplatňovaniu istých poznatkov (body lokálnych extrémov funkcie f sú riešeniami rovnice $f'(x)=0$ — to platí len pre diferencovateľné funkcie, treba vymyslieť vhodné príklady, ktoré objasnia postavenie predpokladu diferencovateľnosti funkcie f ; hodne možností v tomto smere poskytuje skúmanie vzťahu lokálnych extrémov ku globálnemu extrému a pod.). Ďalšie tvorivé snahy sa môžu týkať štruktúry množiny $M(f)$ všetkých bodov ostrých lokálnych maxím (podobné ide robiť aj pre minimá funkcie f). U žiakov treba pestovať snahu poznať kvôli vlastným úvahám dostatočnú zásobu príkladov. Preto je účelné riešiť takéto úlohy: Zostrojiť k danej konečnej množine $A \subset R$ takú funkcu $f: R \rightarrow R$, aby $A = M(f)$. Vec je jednoduchá, ak $A \neq \emptyset$. Vtedy nie je ľahké nájsť dokonca spojité funkcie s uvedenou vlastnosťou. Veci sa komplikujú, ak $A = \emptyset$. Vtedy takou funkciou je funkcia $f(x) = \arctg x$ ($x \in R$). Možno obvyklým spôsobom zaviesť pojem jednostranného extrému (ostrého alebo neostré-

ho, extrém zľava, resp. sprava). Zosilnením predošej otázky je otázka, či existuje taká funkcia $f:R \rightarrow R$, ktorá by v nijakom bode nemala jednostranný neostrý lokálny extrém. Šikovný príklad takej funkcie je uvedený v [2] s. 24. Ide o takto definovanú funkciu $f(x) = 0$, ak x je iracionálne číslo a $f(x) = (-1)^q q/(q+1)$, ak $x = p/q$ je základný tvar racionálneho čísla x . Je to akási extremálna funkcia, nemá nikde ani len jednostranný extrém. Opačným extrémom by bola funkcia, ktorá by mala extrém v každom bode. Ak by išlo o neostrý extrém, vec je jednoduchá a príkladom takej funkcie je ľubovoľná konštantná funkcia. Ak však ide o ostrý extrém, treba sa hlbšie zamyslieť nad existenciou takej funkcie. Spomienky na nadhľad možno poradia učiteľovi, že taká funkcia neexistuje. Je totiž dobre známe, že reálna funkcia na topologickom priestore so spočítateľnou bázou môže mať len spočítateľne veľa bodov ostrých lokálnych extrémov. Tvorivý učiteľ sa môže pokúsiť overiť si tento poznatok v elementárnej situácii (tj. pri učive strednej školy). Napríklad takto: Nech $a \in M(f)$. Potom existuje také $n \in N$, že pre každé $x \in (a - 1/n, a + 1/n) = I_n(a)$, $x \neq a$, platí $f(x) < f(a)$. Označme znakom $M_n(f)$ množinu všetkých a s uvedenou vlastnosťou. Potom zrejme $M(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(f)$

a $M_n(f)$ ($n = 1, 2, \dots$) je zrejme spočítateľná množina, lebo $I_n(a)$, ak $a \in M_n(f)$, okrem a nijaký iný bod množiny $M_n(f)$ neobsahuje.

Teda funkcia $f:R \rightarrow R$ nemôže mať ostrý lokálny extrém v každom bode, množina $M(f)$ je spočítateľná. Naskytá sa otázka, či podobná situácia nastáva aj v separabilných topologických priestoroch, teda či pre ľubovoľnú reálnu funkciu definovanú na separabilnom topologickom priestore je $M(f)$ spočítateľná množina. Ukazuje sa, že na separabilné priestory nemožno rozšíriť predošlý poznatok o spočítateľnosti množín $M(f)$ z teórie priestorov so spočítateľnou bázou. Ukazuje to tento príklad. Zavedme na R topológiu tak, že za jej bázu vezmeme systém všetkých množín tvaru

$$\{x\} \cup (x - a, x + a) \cap Q, x \in R, a > 0$$

Dostaneme tak separabilný topologický priestor (v ňom je hustá množina Q všetkých racionálnych čísel). Definujme na R s uvedenou topológiou funkciu f dirichletovsky takto: $f(x) = 1$, ak x je iracionálne a $f(x) = 0$, ak x

je racionálne číslo. Ľahko overíte, že pre túto funkciu platí $M(f) = R - Q$. Má teda nespočítateľne veľa bodov ostrých lokálnych maxim.

Poznatok o spočítateľnosti množiny $M(f)$ v prípade reálnej funkcie na topologickom priestore so spočítateľnou bázou vedie k otázke, či ku každej spočítateľnej množine $A \subset R$, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ možno zstrojiť takú funkciu $f: R \rightarrow R$, aby $M(f) = A$. To naozaj možno urobiť. Stačí zvoliť $f(a_k) = 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$) a $f(x) = 0$ pre ostatné x . Význam takýchto konštrukcií je značný z hľadiska pestovania matematickej kultúry. Takéto konštrukcie vedú k samostatnému narábaniu s matematickými pojмami, k vytváraniu vlastnej zásoby konkrétneho matematického materiálu, na ktorom možno overovať všeobecné poznatky, resp. hypotézy.

Predošlú konštrukciu reálnej funkcie s predpísanou (spočítateľnou) množinou ostrých lokálnych maxím možno rozšíriť (takmer mechanicky) na reálne funkcie definované v ľubovoľnom topologickom T_1 — priestore. Ďalšie myšlenie tvorivého učiteľa, ktorý vyučujúc istú partiu, sám odborne rastie, by sa mohlo týkať postavenia predpokladu, že daný priestor je T_1 — priestor.

Uvedené úvahy, z ktorých mnohé, zdôrazňujem to výslovne, by slúžili výhradne len učiteľovi samotnému a neoboznamoval by nimi žiakov, by sa mohli uberať v tom smere, že by sa požadovala spojitosť konštruovaných funkcií. Rôzne príznaky svedčia o tom, že vec sa bude dať vo všeobecnosti realizovať aj pri požadovaní spojitosť konštruovaných funkcií. Pripomeňme, že v r. 1915 zstrojil A. Denjoy príklad spojitej funkcie $f: R \rightarrow R$ s hustou množinou $M(f)$. Po dlhšom čase sa podarilo zstrojiť dokonca diferencovateľnú funkciu s hustou množinou ostrých lokálnych extrémov (pozri [3]).

Úmyselne som veci dotiahol až tak ďaleko preto, aby som ukázal, kam až sa možno dostať pri skúmaní problematiky, ktorá vychádza zo školskej matematiky. Pevne verím, že práca našich učiteľov matematiky stredných škôl bude v budúcnosti na takej úrovni (aj v oblasti zdokonaľovania vlastnej matematickej kultúry), že veci, ktoré som naznačil, sa nebudú javiť ako nereálne snenie. Treba v tejto súvislosti hľadať a vytvárať dobré podmienky našim učiteľom na realizovanie uvedeného ideálneho stavu sebazuďokonaľovania. Sem patrí skvalitnenie práce učiteľských fakúlt, vytvorenie vhodnej príručky, o ktorej už bola reč a ak sa nemýlim, o niečom podobnom sa hovorilo aj na Celoslovenskom seminári

o vyučovaní matematiky v r. 1980, ďalej organizovanie rozjímových seminárov určených učiteľom matematiky stredných škôl (podobné formy sa osvedčili na vysokých školách), hlavnou podmienkou pre dosahovanie naznačeného ideálneho stavu je dať učiteľom dosť voľného času a pokoja, aby mohli nerušene pracovať na zdokonaľovaní vlastnej matematickej kultúry. To je vec veľmi rentabilná, skutočné ovocie takýchto snáh pocíti škola sama a školená mládež v nej. Najdôležitejšia však je úprimná snaha učiteľov pracovať na zdokonaľovaní vlastnej matematickej kultúry. Využívať možno rozvíjajúcú sa literatúru tohto určenia (Edícia ε, Matematické obzory, sovietska matematická literatúra tohto zamerania a pod.).

Bolo by veľmi pomýlené a nezodpovedalo by historickej skúsenosti také uvažovanie, ktoré by vopred odsudzovalo na neúspech snahy dovestť prácu na vlastnej matematickej kultúre učiteľov stredných škôl až k samostatnej vedeckej práci. Spomínam si, ako svojho času akademik E. Čech vyslovil myšlienku, podľa ktorej na rozvoji matematiky sa môže činorodo zúčastňovať každý matematik. V tejto súvislosti treba spomenúť, že často otázky, podnety začínajúcich matematikov boli na začiatku významných matematických výsledkov. Tak napríklad W. Mnich, myslím ešte ako študent, položil otázku, či existujú také celé čísla x, y, z , aby

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

Táto otázka je ekvivalentná s otázkou, či existujú také tri racionálne čísla a, b, c , aby $a + b + c = a \cdot b \cdot c = 1$. Ak totiž také racionálne čísla existujú, tak nevyhnutne sú všetky rôzne od nuly. Nech $a = l/m$, $b = r/s$ (základné tvary). Zvoľme $x = l \cdot r$, $y = m \cdot r$, $z = m \cdot s$. Potom čísla x, y, z takto definované sú celé a jednoduchý výpočet dáva

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{l}{m} + \frac{r}{s} + \frac{m \cdot s}{l \cdot r} = a + b + \frac{1}{a \cdot b} = a + b + c = 1$$

Obrátene, ak x, y, z sú celé čísla a spĺňajú predošlú diofantickú rovnicu, tak položíme

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$$

Potom $a + b + c = 1$ a súčasne $a \cdot b \cdot c = 1$.

Toto všetko postrehli ihneď poľskí matematici, no na Mnichovu otázku dlho nevedeli dať uspokojivú odpoveď. Až v r. 1960 ukázał J. W. S. Cassels (pozri [1]), že uvedená rovnica nemá riešenie v celých číslach (teda neexistujú racionálne čísla a , b , c požadovaných vlastností).

Poznamenanajme, že uvedená diofantická rovnica má riešenie v celých komplexných číslach, napr. $x = 1$, $y = 1$, $z = i$ (pozri [6] s. 425; [7] s. 176).

Čo z toho, čo učiteľ získa vlastným sebazdokonaľovaním, by mal preniesť do pedagogického procesu? Domnievam sa, že ani nie tak veci z oblasti množstva poznatkov, ako skôr veci z 1. zložky matematickej kultúry (hľadať aplikácie študovaných poznatkov, formulovať a spoločne so študentmi riešiť primerané problémy a takto a tiež inými spôsobmi podnecovať u študentov rozvoj ich zvedavosti a tvorivého myslenia). Vzdelanejší a po ďalšom vzdelaní túžiaci učiteľ by sa mal zaoberať aj problematikou, ktorá leží nad preberanou látkou, mal by sa snažiť výsledky, resp. otázky publikovať napr. v Matematických obzoroch (nadviazať tak kontakt s inými matematikmi a tak sa priblížiť k ideálu kolektívnej tvorivej práce v matematike. Nezanedbateľná môže byť aj snaha učiteľa osvojiť si nové prístupy a postupy v preberanom učive. Tu v súvislosti s učivom o extrémoch funkcií som rád upozornil na peknú knižôčku [5].

Už samotné zaoberanie sa uvedenou tematikou aj bez vlastných samostatných vedeckých výsledkov, má dobrý vplyv na učiteľa, pestuje v ňom špekulatívnosť a invenciu, a to sa v pedagogickom procese presúva na žiakov. Časť toho, čo sám takto získa, môže využiť vo výberových seminároch, resp. krúžkoch matematickej olympiády.

Zdôrazňujem ešte raz, že rozlišujem medzi tvorivou prácou učiteľa so študentmi a prácou učiteľa na zveľaďovaní vlastnej matematickej kultúry. Toto oddeľovanie nemá metafyzický charakter, obidve uvedené časti jeho činnosti sa v prospech jeho učiteľského pôsobenia prelínajú a vzájomne ovplyvňujú, nepochybne v prospech rozumového rastu jeho žiakov.

Literatúra

- [1] Cassells, J. W. S.: On a diophantine equation. Acta Arithm. 6 (1960), 47 až 52.
- [2] Gelbaum, B. R.—Olmsted, J. M. H.: Counterexamples in Analysis. Holden-Day, San Francisco—London—Amsterdam 1965.

- [3] Katznelson, Y.—Stromberg, K.: Everywhere differentiable nowhere monotone functions. Amer. Math. Monthly 81 (1974), 349 až 354.
- [4] Kraemer, E.: Problémy jednotné přípravy učitelů všeobecne vzdělávacích předmětů. Vysoká škola 10 (1979—80), 433 až 439.
- [5] Natanson, I. P.: Prostejšie zadači na maksimum i minimum. Fizmatgiz, Moskva—Leningrad 1960.
- [6] Sierpiński, W.: Elementary Theory of Numbers. PWN, Warszawa 1964.
- [7] Sierpiński, W.: Teoria liczb II, PWN, Warszawa 1959.

Obzera a knižovní rozšírenie súvisejúce s článkom. Čo sa v činnosti vedejšej knižky vyzýva diferenciálny a integrálny počet, keď na vysokej matici ho už nikt nečítal znova? Čiastočne Robins dokonca byl jednou z kompromisných odpovedí na uvedenie výsledku "Na rozhodnutí o vysokoškolskej predbežnej preškolnej hodine postúpil o dňačku článkom počtu (na ktorý sa v tomto článku obrádzajúce) prvá informácia".

Praudnú posudiaciu rukou naznačuje v konató článku posúvajeme súčt za aktuálnu informáciu, kde sa rovnaké súme chceli označiť skôr ako, čo je možné viesť do učebnice [1], či do jej experimentálnej novofiziky [3]. (Niet tu už však žiadne aranžmá na to, aby sme sa poznali, čo súcej posúvajúce a informácia málok prvej.)

Ak povedený text má svoj experimentálny ráz, jeho podstata dosiahola významu vo vedeckej experimentálnej učebnici [2]. Mnoho zo súčtu učebníc a učebničkov je využívateľnosťou Robinsa ako jedinak pravoslovne, že experimentálny materiál [2] má presne len meno preplňané a tiež vlastne nie o jeho vlastnom posúvacom, jedinak preto, že v učebnici experimentálnych učebníc vedecká a teóriu differenciálnej výpočtu osobiťne a vlastne neviac. Veríme, že aktuálna informácia si nájdzie spôsob klesa až v učebničkách pretečených. Čiže toho v učebniciach aplikáciu monotoných funkcií nájsť vlastne vlastne (vlastne vlastne vlastne vlastne) kdežto pôvodný záber (poprie diferenciálneho počtu na skončenie prebehu funkcií), sa v [3] de facto nepodarilo dosiahnuť. Vlastne vlastne vlastne sa vlastne aplikácia odstavca neviac.

Konvergencia a parabola

Všetko, čo kadiaľ lineárne funkcie s definičným oborom \mathbb{R} je dané reprezentované