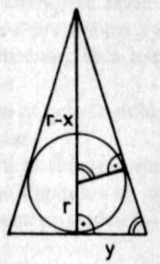
ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Bohuslav Sivák, 960 01 Zvolen, Ferienčíkova 2361. Nové úlohy s riešeniami posielajte na jeho adresu.

Úloha (autor M. Gnoth)

Dokážte, že spomedzi všetkých kužeľov opísaných danej guli s polomerom r má najväčší objem kužeľ s výškou $4r$.

Riešenie: Nech x je výška, y polomer podstavy kužeľa opísaného danej guli (situáciu v reze znázorňuje *obr. 1*). Pretože výška v trojuholníku je



Obr. 1

vždy väčšia než priemer vpísanej kružnice, je $x > 2r$. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov dostaneme:

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{\sqrt{(x-r)^2 - r^2}}$$

teda

$$y^2 = \frac{r^2 x}{x - 2r}$$

Objem kužeľa je:

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{x^2}{x-2r}$$

Označme $\dfrac{x^2}{x-2r} = z$, potom pre vyjadrenie x pomocou z dostaneme kvadratickú rovnicu $x^2 - xz + 2rz = 0$, ktorá má reálny koreň, teda jej diskriminant je nezáporný: $D = z^2 - 8rz \geqq 0$, odkiaľ $z \geqq 8r$, $V \geqq \frac{8}{3}\pi r^3$. Rovnosť nastane práve vtedy, ak $x = 4r$, $y = r\sqrt{2}$.