HODNOST MATICE

ANTONÍN VRBA, Praha

Tvrzení, že počet lineárně nezávislých řádků matice je stejný jako lineárně nezávislých sloupců, není úplně samozřejmé. Pro studenta vysokoškolského kurzu matematiky je to jeden z prvních faktů, kterému se nedá věřit ani na základě zdravého názoru (jako je např. Darbouxova vlastnost spojité funkce), ani ho nelze ověřit jednoduchým kalkulem (všechny báze konečně rozměrného prostoru mají stejnou mohutnost). Zmíněné tvrzení se nejčastěji dokazuje buď pomocí teorie determinantů, nebo pomocí teorie soustav lineárních rovnic. První způsob je, jak známo, založen na tom, že počet lineárně nezávislých řádků souhlasí s rozměrem největší regulární podmatice, přičemž determinant transponované matice je roven determinantu původní matice. Druhý způsob pak využívá věty o dimenzi prostoru všech řešení soustavy lineárních homogenních rovnic. Oba způsoby umožňují odvodit zmíněné tvrzení až po probrání příslušných pojmů (permutace a determinanty v prvním případě, skalární součin a ortogonální doplněk ve druhém) a teorií, což staví tvrzení samo do poněkud falešné pozice co do významu, souvislostí i hloubky. Tvrzení má však spíše kombinatorický charakter a dá se odvodit průhledným způsobem už v elementárním stádiu výkladu o lineární závislosti vektorů. Postup je popsán ve zbytku této poznámky.

Z toho, že kolekce lineárně nezávislých vektorů z n-rozměrného prostoru se skládá nanejvýš z n vektorů, okamžitě plyne:

Tvrzení 1. Jsou-li řádky matice lineárně nezávislé a sloupce také, je matice čtvercová.

Uvažujme dále matici, jejíž řádky jsou lineárně nezávislé. Vynecháme-li některé její sloupce, může se stát, že „zkrácené řádky" lineárně nezávislé nebudou. Platí však:

Tvrzení 2. Nechť řádky matice jsou lineárně nezávislé. Vynecháme-li z ní sloupce, které jsou lineárními kombinacemi zbylých sloupců, budou řádky výsledné matice lineárně nezávislé.

Důkaz: Můžeme předpokládat, že posledních $s-c$ sloupců $r \times s$ matice $\mathbf{A}=(a_{ij})$ jsou lineární kombinace prvních c sloupců, tj. existují koeficienty z_{kj} $(k=c+1, \ldots, s\,;\ j=1, \ldots, c)$ tak, že pro všechny $(i, k) \in$ $\in \{1, \ldots, r\} \times \{c+1, \ldots, s\}$ je

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{c} z_{kj} a_{ij}$$

Je-li nějaká lineární kombinace „zkrácených" řádků nulový vektor, tj. pro všechna $k \in \{1, \ldots, c\}$ je

$$\sum_{i=1}^{r} t_i a_{ik} = 0$$

je nulová tatáž lineární kombinace původních řádků, protože pro všechna $k \in \{c+1, \ldots, s\}$ platí

$$\sum_{i=1}^{r} t_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{r} t_i \sum_{j=1}^{c} z_{kj} a_{ij} = \sum_{j=1}^{c} z_{kj} \sum_{i=1}^{r} t_i a_{ij} = 0$$

Řádky matice $\mathbf{A}$ jsou tedy lineárně závislé právě když jsou lineárně závislé řádky „zkrácené" popsaným způsobem.

Teď už je vše připraveno k odvození věty o souvislosti řádkové a sloupcové hodnosti. Uvažujme matici, která má řádkovou dimenzi r a sloupcovou s. Můžeme předpokládat, že prvních r řádků je lineárně nezávislých a prvních s sloupců také. Použijeme-li Tvrzení 2 dvakrát za sebou, zjistíme, že levá horní $r \times s$ podmatice má lineárně nezávislé řádky i sloupce. Podle Tvrzení 1 je tedy $r=s$.