ŠIESTACI A KARDINÁLNE ČÍSLA

ZDENA RIEČANOVÁ, Bratislava

Pojem mohutnosti množiny iste nepatrí medzi najľahšie. O to prekvapujúcejšie sú riešenia, ktoré uvádzame v tomto článku a na ktoré prišli šiestaci v letnom pionierskom tábore mladých matematikov. A to súťaži v riešení uvedených príkladov predchádzala len asi trištvrtehodinová prednáška (jediná na túto tému).

V prednáške sa deti dozvedeli, kedy sú dve množiny M a P rovnako mohutné: Ak z prvkov množiny M a prvkov množiny P sa dajú utvoriť také dvojice $[m, p]$ kamarátov, že každý prvok $m \in M$ má práve jedného kamaráta $p \in P$ a súčasne každý prvok $p \in P$ je kamarátom práve jedného prvku $m \in M$.

Motiváciou takto zavedeného pojmu bola otázka, či je v prednáškovej miestnosti práve toľko stoličiek, koľko je prítomných poslucháčov. Ako to zistiť bez počítania?

Ďalšie príklady sa riešili za pomoci detí vo voľnej diskusii.

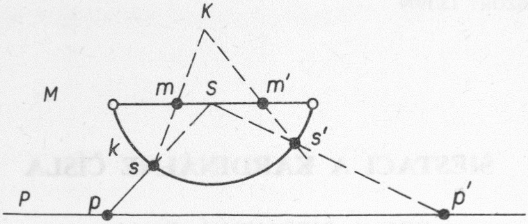
Príklad 1. Ukázať, že množiny $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ sú rovnako mohutné.

Príklad 2. Ukázať, že ľubovoľné dve úsečky (teda nie nevyhnutne rovnako dlhé) sú rovnako mohutné množiny bodov.

Príklad 3. Ukázať, že množina všetkých bodov nejakej úsečky bez koncových bodov je rovnako mohutná s množinou všetkých bodov nejakej priamky.

Riešenie: Dvojice kamarátov $[m, p]$ zo zvolených množín M, P tvoríme podľa metódy znázornenej na *obr. 1.* K prvku $m \in M$ nájdeme najprv jeho sprostredkovateľa s na polkružnici k. Sprostredkovateľ s nájde k prvku m jeho kamaráta $p \in P$. Pritom platí:

a) Prvok $m \in M$ leží so svojím sprostredkovateľom $s \in k$ vždy na tej istej polpriamke vychádzajúcej z bodu K.



Obr. 1

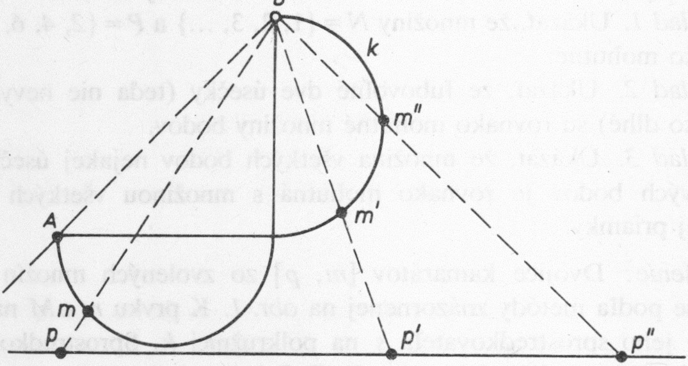
b) Kamarát $p \in P$ k bodu $m \in M$ leží s jeho sprostredkovateľom s na tej istej polpriamke vychádzajúcej zo stredu S polkružnice k.

Ako súťažné úlohy dostali deti dokázať:

1. Množiny $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $T = \{3, 6, 9, \ldots\}$ sú rovnako mohutné.
2. Množiny $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sú rovnako mohutné.
3. Množina všetkých bodov nejakej kružnice a množina všetkých bodov nejakej polpriamky sú rovnako mohutné.

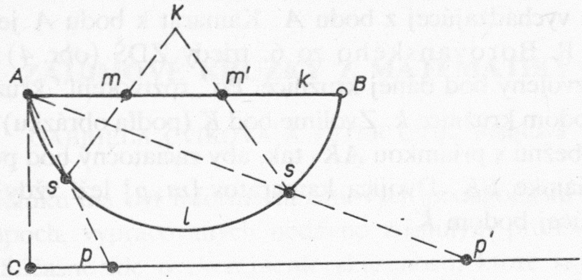
Zaujímavé sú samostatné riešenia príkladu 3. Tri z nich uvádzame.

Riešenie M. Benáka zo 6. triedy ZDŠ Košická (*obr. 2*): A je ľubovoľne zvolený bod danej kružnice k. Pri „roztvorení" kružnice bod B

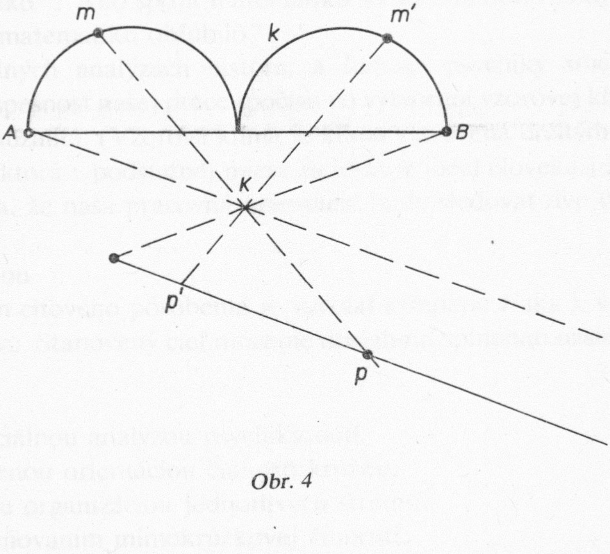


Obr. 2

nepatrí k bodom kružnice k. Dvojica $[m, p]$ kamarátov leží vždy na tej istej polpriamke vychádzajúcej z bodu B.



Obr. 3



Obr. 4

Riešenie H. Riečanovej zo 6. triedy ZDŠ Košická (*obr. 3*): A je ľubovoľne zvolený bod danej kružnice. Kružnicu k kotúľaním od bodu A do bodu B „rozbalíme" do úsečky AB bez koncového bodu B. K bodu m z úsečky AB hľadáme najprv jeho sprostredkovateľa s na polkružnici l a ten mu nájde kamaráta p na danej priamke. Pritom platí:

a) Prvok $m \in M$ a jeho sprostredkovateľ $s \in l$ ležia vždy na tej istej polpriamke vychádzajúcej z bodu K.

b) Kamarát p leží so sprostredkovateľom s bodu m na tej istej polpriamke vychádzajúcej z bodu A. Kamarát k bodu A je bod C.

Riešenie P. Borovanského zo 6. triedy ZDŠ (*obr. 4*): Bod A je ľubovoľne zvolený bod danej kružnice. Po „roztvorení" kružnice bod A nepatrí k bodom kružnice k. Zvolíme bod K (podľa obrázku) a polpriamku p rovnobežnú s priamkou AK, tak, aby začiatočný bod polpriamky p ležal na priamke BK. Dvojica kamarátov $[m, p]$ leží vždy na tej istej priamke idúcej bodom K.