ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Bohuslav Sivák, 816 31 Bratislava, Matematický pavilón PFUK, Mlynská dolina. Nové úlohy s riešeniami posielajte na jeho adresu

Úloha A (autor P. Cvik). Na *obr. 1* je autobusová sieť mesta X. Čiary znamenajú možné autobusové spoje, krúžky sú zastávky. Autobusy v meste X musia zastaviť na každej zastávke, ktorá sa nachádza na ich trase. Názvy zastávok sú A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N. Autobusy premávajú na nasledujúcich štyroch linkách:

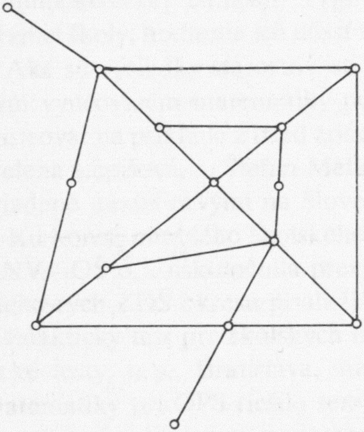
$$E\,F\,H\,L\,C\,K\,J\,D \tag{1}$$

$$A\,C\,D\,B \tag{2}$$

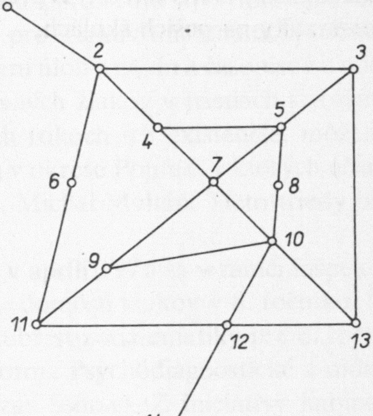
$$M\,I\,H\,A\,K\,J\,N \tag{3}$$

$$G\,M\,F \tag{4}$$

Nájdite rozmiestenie zastávok, ak viete, že aspoň jedna z liniek 1 až 4 je okružná, t. j. jej posledná a prvá zastávka sú susedné.



Obr. 1



Obr. 2

Riešenie. Kvôli prehľadnosti zápisu označíme zastávky na *obr. 1* číslami ako na *obr. 2.* Na základe existencie liniek 1 až 4 máme zaručenú existenciu 17 dvojíc susedných zastávok: AC, AH, AK, BD, CD, CK, CL, DJ, EF, FH, FM, GM, HI, HL, IM, JK, JN, túto situáciu prehľadne znázorňuje *obr. 3.* Vidíme z neho, že uvažovaná autobusová sieť pripúšťa tri hypotetické okružné linky dĺžky 4, a to:

$$H\ I\ M\ F\ H \tag{5}$$

$$H\ A\ C\ L\ H \tag{6}$$

$$C\ K\ J\ D\ C \tag{7}$$

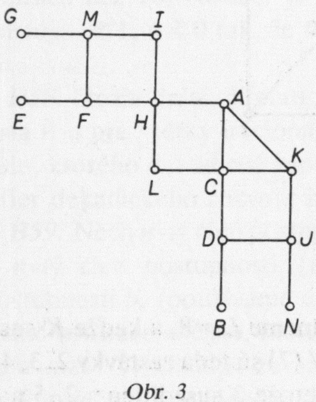
Z nich prvá a tretia nemajú spoločné zastávky, prvá a druhá majú spoločnú práve zastávku H, druhá a tretia zas C. Na *obr. 2* existujú práve tri cykly dĺžky 4, a to

2-3-5-4-2, 5-8-10-7-5, 10-12-11-9-10.

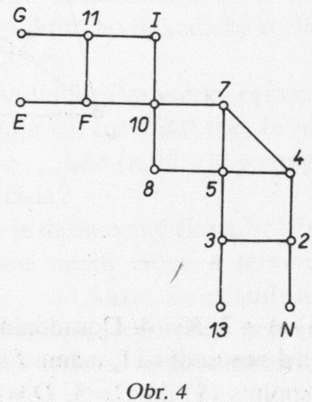
Porovnaním dostaneme:

$$\{H, C\} = \{5, 10\}, \quad \{A, L\} = \{7, 8\},$$
$$\{M, J\} = \{2, 11\}, \quad \{D, F, I, K\} = \{3, 4, 9, 12\}$$

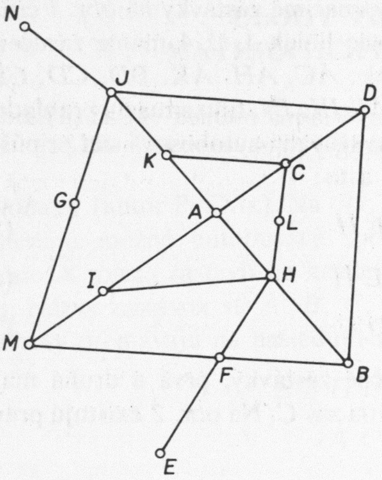
Pretože podľa *obr. 3* sú A, K susedné, treba zistiť, ktorá zo zastávok 7, 8 susedí s ktorou zo zastávok 3, 4, 9, 12. Z *obr. 2* vidieť, že iba 7 susedí so 4 a 9. Sú teda dve možnosti:



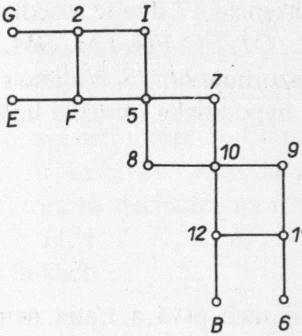
Obr. 3



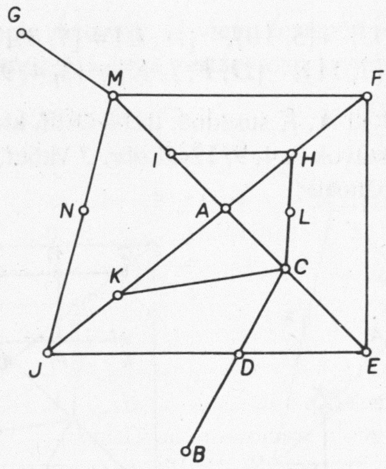
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

a) $A = 7$, $K = 4$. Dosadením do (8) dostaneme $L = 8$, a keďže K susedí s J a 4 nesusedí s 11, máme $J = 2$, $M = 11$. V (7) sú teda zastávky 2, 3, 4, 5, čo spolu s (8) dá $C = 5$, $D = 3$, $H = 10$. Pretože 3 susedí len s 2, 5 a 13, *obr. 3* dáva $B=13$, pozri *obr. 4*. Pretože 9 susedí len so 7, 10 a 11, platí $F=9$ a podľa (8) $F=12$, $I=9$. Pretože 12 susedí len s 10, 11, 13 a 14, máme $E=14$. Ďalej, 11 susedí len so 6, 9 a 12, teda $G=6$ a zostáva $N=1$, pozri *obr. 5*. Pretože v tejto sieti žiadna z liniek (1) až (4) nie je okružná, toto rozmiestenie nedáva riešenie úlohy.

b) $A=7$, $K=9$. Podobne ako v a), porovnaním týchto údajov s *obr. 2, 3* dostaneme $L=8$, $J=11$, $M=2$, $C=10$, $D=12$, $H=5$, a keďže 11 susedí len so 6, 9 a 12, máme $N=6$ (pozri *obr. 6*). Pretože so 4 susedia len 2, 5 a 7, platí $F=4$ a podľa (8) $F=3$, $I=4$. Pretože s 2 susedia len 1, 3, 4 a 6, platí $G=1$, a pretože s 3 susedia len 2, 5 a 13, platí $E=13$ a zostáva $B=14$ (pozri *obr. 7*). Tu máme dokonca dve okružné linky, a to (1) a (3).

Jediné riešenie úlohy je teda na *obr. 7*.

ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Tomáš Hecht, Matematický pavilón PFUK, Mlynská dolina 816 31 Bratislava. Riešenia úloh uvedených v tomto zväzku pošlite na adresu vedúceho rubriky do 20. 11. 1978

B57 Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť nezáporných celých čísel menších než 10. Nech n je prirodzené číslo nesúdeliteľné s 10. Potom existuje $i \geqq 1$, $k \geqq 0$ tak, že n delí celé číslo, ktorého dekadický rozvoj je $a_i a_{i+1} \ldots a_{i+k}$.

B58. Rozhodnite, či platí nasledujúce tvrdenie: Pre všetky prirodzené čísla n a pre všetky iracionálne čísla existuje $i \geqq 1$ a $k \geqq 0$ tak, že n delí číslo, ktorého dekadický zápis je $a_i a_{i+1} \ldots a_{i+k}$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť cifier dekadického rozvoja iracionálneho čísla?

B59. Nech n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaný ako $a_n = 17n + 8$ a n-tý člen postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná súčtu cifier n-tého člena postupnosti b_n (používame dekadický zápis). a) Ukážte, že existuje aspoň jedno prirodzené číslo, ktoré sa v postupnosti $\{b_n\}$ vyskytuje nekonečne veľa razy! b) Ukážte, že každé prirodzené číslo sa v postupnosti $\{b_n\}$ vyskytuje, a to nekonečne veľakrát.