ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Tomáš Hecht, 81631 Bratislava Matematický pavilón PF Mlynská dolina. Riešenia úloh uvedených v tomto čísle pošlite na adresu vedúceho rubriky najneskoršie do 15. 2. 1977.

B 39. V priestore je daná množina M bodov s nasledujúcou vlastnosťou: ku každému bodu priestoru existuje práve jeden najvzdialenejší bod z množiny M. Dokážte, že množina M je jednobodová!

B 40. Ktoré prirodzené čísla majú násobok, ktorého zápis v desiatkovej sústave je pomocou samých 9 (t. j. tvaru 999...9)?

B 41. Pre aké najmenšie číslo k existuje rozklad štvorca S na ostrouhlé trojuholníky $M_1, M_2, \ldots, M_k$ t. j. má platiť $\bigcup_{i=1}^{k} M_i = S$ súčasne $M_i^\circ \cap M_j^\circ$*$) = \emptyset$ pre $i \neq j$.

Úlohy *B 39* až *B 41* sme vybrali spomedzi Úloh zo seminára na prípravu účastníkov MMO.

B 42. Bez pomoci stroja nájdite prvočíslo väčšie než 10^6 a dokážte, že vybraté číslo je prvočíslo!

T. Hecht

B 43. Nájdite (zmiešanú) stratégiu, ktorá štatisticky zaručuje, že neprehráte v tejto hre — presnejšie — stredná hodnota vašej výhry bude nezáporné číslo. Pravidlá hry. Hrajú dvaja hráči A a B. Obaja nezávisle jeden od druhého napíšu prirodzené číslo. Číslo hráča A označme n_A, hráča B n_B. Napísané čísla sa porovnajú. Ak sa rovnajú, je remíza. Hráč A vyhráva v týchto dvoch prípadoch

1. prípad $n_A > n_B$, súčasne $n_A \leqq 2n_B$,
2. prípad $n_B > 2n_A$.

V ostatných prípadoch vyhráva hráč B.

T. Hecht

B44 (zábavná úloha z matematického folklóru). Do Kocúrkova príde kráľovský posol a vyhlási kráľov rozkaz, podľa ktorého v meste sa nachádza aspoň jedna neverná žena a muž každej nevernej ženy musí neveru svojej ženy potrestať jej zabitím v noci toho dňa, keď o nevere svojej ženy získa istotu. Každý muž vie o každej cudzej žene, či je verná alebo nie, no nevie, či mu je vlastná žena verná. Obyvatelia Kocúrkova sa schádzajú každé ráno na námestí a klebetia, takže ak došlo k nejakej vražde, ráno sa o tom dozvedia. Na 7. deň po príchode posla starosta zabil svoju ženu. Koľko neverných žien bolo v Kocúrkove?

---

*) M_i° znamená vnútro trojuholníka M_i.

Riešenia niektorých úloh z predchádzajúcich zväzkov Matematických obzorov

Riešenie úlohy B31 (*Miloš Franek*).

Každá transformácia $f \in GE(2)$, uvažovaná ako transformácia na množine M náleží do grupy $\Gamma(M, d)$. Ukážeme, že v $\Gamma(M, d)$ niet iných transformácií. Teda grupy $\Gamma(M, d)$ a $GE(2)$ sú kanonicky izomorfné. Dôkaz tohto tvrdenia sa zakladá na dvoch tvrdeniach.

Tvrdenie A. Ak $f \in \Gamma(M, d)$, tak pre každý kruh $x \in M$ platí $\mu(x) = \mu(fx)$.

Tvrdenie B. Ak $f \in \Gamma(M, d)$, tak dvojica sústredných kruhov x, y sa zobrazí transformáciou f opäť do dvojice sústredných kruhov fx, fy.

Najprv ukážeme, ako z tvrdení A a B vyplýva inklúzia $\Gamma(M, d) \subset GE(2)$. Nech teda $f \in \Gamma(M, d)$ a nech A, B sú dva body z E^2 vzdialené h. Nech a, b sú kruhy s polomerom $\frac{h}{2}$ so stredmi v bodoch A, B. Nech c je kruh s polomerom h, so stredom v strede C úsečky AB. Potom konfigurácia troch kruhov a, b, c sa transformáciou f zobrazí do zhodnej s ňou konfigurácie fa, fb, fc. Bod A ako prienik všetkých kruhov sústredných s a prejde transformáciou f do bodu A', ktorý je daný ako prienik všetkých kruhov sústredných s kruhom fa. Podobne stred B kruhu b prejde transformáciou f do stredu B' kruhu fb. Vzdialenosti AB a $A'B'$ sú teda rovnaké, t. j. $f \in GE(2)$.

Ukážeme, že z tvrdenia A vyplýva tvrdenie B. Predpokladajme sporom, že x, y sú sústredné a fx, fy nie sú sústredné; nech $\mu(y) > \mu(x)$. Potom v kruhu fy existuje kruh fz disjunktný s kruhom fx, pričom $\mu(fz)$ je „maximálne"; potom kruh $f^{-1}(fz) = z$ neexistuje — spor.

Konečne dokážeme tvrdenie A. Predpokladáme sporom, že $\mu(fa) - \mu(a) = p > 0$; v prípade $p < 0$ zameníme f za f^{-1}. Utvorme nekonečnú postupnosť $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kruhov z M, ktoré sú disjunktné s kruhom a i navzájom a pre ktoré $\mu(b_i) = p$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots$. Systém množín $T_n = \{fb_i;\ (n-1)p < \mu(fb_i) \leqq np\}$ tvorí disjunktný rozklad množiny $\{fb_1, fb_2, \ldots\}$. Pretože z $d(fb_i, fa) = \mu(a) + p$ vyplýva $\mu(fb_i) \leqq \mu(a) + p$, je iba konečne veľa z množín $T_1, T_2, \ldots$ neprázdnych. Preto aspoň jedna z nich je nekonečná. Nech je to množina T_n. Z faktu $d(fa, fb_i) = \mu(fa)$ vyplýva

Tvrdenie C. Každý z kruhov $k \in T_n$ leží vnútri kruhu b, ktorý je sústredný s kruhom a a má dvojnásobný polomer.

Z faktov $k_1, k_2 \in T_n \Rightarrow |\mu(k_1) - \mu(k_2)| < p$; $d(fa, k_1) = d(fa, k_2) = \mu(fa)$ sa dá (ale to nie je triviálne) dokázať

Tvrdenie D. Existuje kladné číslo δ tak, že pre každé $k_1, k_2 \in T_n$, $k_1 \neq k_2$ je euklidovská vzdialenosť stredov kruhov k_1 a k_2 väčšia ako 2δ.

Nech teraz W je množina všetkých kruhov s konštantným polomerom δ a so stredmi vo všetkých možných stredoch kruhov k T_n. Podľa tvrdenia D sú každé dva z kruhov množiny W disjunktné, a preto ich plošný obsah nie je konečný. To odporuje tvrdeniu B, podľa ktorého všetky tieto kruhy ležia v kruhu b.

Riešenie úlohy *B27* (Pavol Valent).

Označme $c = \min(2a, b)$ a definujme zobrazenie $d' : M \times M \to R$ predpisom

$$d'(x, y) = \frac{a + c \cdot d(x, y)}{1 + d(x, y)} \qquad \forall (x, y) \in \ddot{M}$$

$$d'(x, x) = 0 \qquad \forall x \in M$$

Potom d' je hľadaná metrika, ekvivalentná so zobrazením d.

Problémy 8. zväzku Matematických obzorov správne riešili:
M. Franek, Prievidza: B 33, 34, 35, 36, 37, 38.
B. Zelinka, Liberec: B 33, 34, 35, 36, 37.
J. Dravecký, Bratislava: B 34, 36.