TRISEKCIA UHLA A ZDVOJENIE KOCKY AKO STRATEGICKÉ MOTÍVY*

ANNA MICHALCOVÁ, Zvolen

Pre rozvoj intuície je dôležité vystihnúť tie momenty,
keď tá či iná úloha...
...vyvolá trvalý záujem.

P. M. Erdniev

Motivovať žiaka (v matematike) znamená vzbudiť jeho záujem o matematiku. V článku [1] ukazuje M. Hejný na dva typy motivácií: *taktické*, ktorých cieľom je vzbudiť žiakov záujem okamžite a krátkodobo, a *strategické*, ktorých cieľom je „nasadiť žiakovi do hlavy chrobáka".

V historickom vývoji (vo fylogenéze) matematiky sú známe mnohé problémy, ktoré pôsobili ako strategické motívy neraz po celé storočia. Neustále provokovali matematikov, orientovali historický tok vedy, pomáhali ju štrukturovať a hierarchizovať. Predovšetkým k nim patria dva klasické problémy: trisekcie uhla a zdvojenie kocky.

Cieľom príspevku je metodicky pripraviť obidva problémy na použitie v školskej praxi. Múdro povedané — urobiť fylogenetickú analýzu s cieľom ontogenetickej aplikácie. Na to bolo treba:

1. zozbierať historický materiál k vytipovaným fylogenetickým strategickým motívom,
2. analyzovať ho z hľadiska genézy a pripraviť chronologickú štruktúru pre ontogenézu.

Z hľadiska fylogenézy si treba hneď uvedomiť dve veci — riešenie oboch problémov trvalo viac ako dve tisícročia, — riešenie dopadlo negatívne: ani jeden z uvedených problémov sa euklidovskými konštrukciami rozriešiť nedá. Práve preto sú všetky v histórii nájdené „riešenia" nevyhnutne

---

* V článku je opísaná hlavná myšlienka práce, ktorá vznikla v rámci ŠVOČ.

neúplné či nedostatočné. Keď zozbierame obsiahlejší materiál týchto „riešení", nájdeme aj klasifikačné kritérium. „Riešenia" možno rozdeliť do troch skupín podľa použitej metódy:

1. metóda aproximatívnych kriviek,
2. metóda neeuklidovských inštrumentov,
3. metóda neeuklidovského zaobchádzania s euklidovskými inštrumentmi.

Pripomenieme, že euklidovskou konštrukciou sa rozumie operácia kružidlom a pravítkom, ktorá sa skladá z týchto výkonov:

1. zvoliť ľubovoľný bod,
2. narysovať priamku, prechádzajúcu dvoma rôznymi známymi bodmi,
3. určiť priesečník dvoch rôznych priamok,
4. narysovať kružnicu, ktorá je určená stredom a polomerom,
5. určiť priesečníky dvoch kružníc,
6. určiť priesečníky priamky a kružnice.

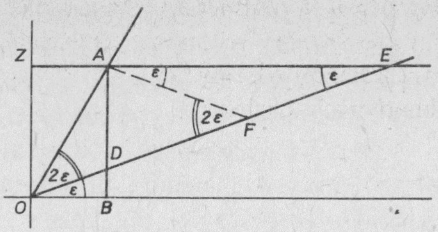
Uvedieme niekoľko „riešení" s krátkou analýzou.

Jedným z prvých spôsobov riešenia trisekcie je metóda „vkladania", ktorá bola známa už v 5. str. pr. n. l. Pappus ju v Matematických zbierkach uvádza takto:

„Nech máme daný ostrý uhol AOB. Z ľubovoľného bodu jedného ramena, napr. A, vedieme kolmicu na druhé rameno. Päta kolmice je B. Doplníme na pravouholník $OBAZ$. Stranu ZA predĺžime do bodu E. Bod E na predĺžení určíme tak, aby úsečka DE priamky OE sa rovnala dvojnásobku úsečky OA. Potom uhol EOB je tretinou daného uhla AOB.

Dôkaz: Nájdeme stred úsečky DE, označíme ho F. Trojuholník ADE je pravouhlý a platí: $|AF| = |EF| = |DF| \Rightarrow |DE| = 2|AF|$. Zároveň ale $|DE| = 2|OA| \Rightarrow |AF| = |OA|$ a $|\sphericalangle AOD| = |\sphericalangle AFD|$, $|\sphericalangle AFD| = 2|\sphericalangle AED| = 2|\sphericalangle EAF| = 2|\sphericalangle DOB| \Rightarrow |\sphericalangle AOD| =$ $= 2|\sphericalangle DOB| \Rightarrow |\sphericalangle DOB| = \frac{1}{3}|\sphericalangle AOB|$."

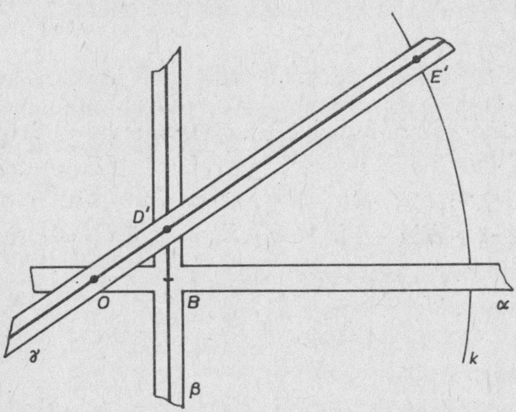
Dôkaz je správny, problémom je však zostrojenie bodu E, ktorý by spĺňal podmienky riešenia. Dnes vieme, že nájsť „vklad" $|DE| = 2|OA|$ sa pomocou euklidovskej konštrukcie nedá. Dá sa to urobiť pomocou prúžku papiera alebo pravítkom, na ktorom je vyznačená úsečka dĺžky $2|OA|$.



Obr. 1

Do bodu O zapichneme hrot ceruzky a oprieme oň pravítko. Pravítkom potom pohybujeme tak, aby jeden koncový bod (bod D) vyznačenej úsečky padol na priamku AB a druhý (bod E) na priamku ZA. Je zrejmé, že takéto zaobchádzanie s pravítkom nie je euklidovské, lebo pri ňom potrebujeme súčasne sledovať dva rôzne body. O tomto nedostatku starí Gréci dobre vedeli, preto hľadali zlepšenie metódy. To našiel neskôr Nikomédes (2. st. pr. n. l.). Použil na to inštrument, ktorý sám zostrojil. Skladá sa z pravítok α, β, γ *(obr. 2)*.

Na pravítku α je pripevnený kolík O. Ten sa pohybuje v žliabku pohyblivého pravítka γ, na ktorom je pripevnený kolík D' a píšúci hrot E'. Platí $|D'E'| = 2|OA|$. Kolík D' sa pohybuje v žliabku pravítka β. Pri pohybe pravítka γ hrot E' opisuje jednu vetvu krivky, ktorá sa nazýva Nikomédova konchoida (krivka k na *obr. 2*).



Obr. 2

Hľadaný bod E dostaneme ako priesečník konchoidy k a priamky ZA (porovnaj *obr. 1* a *2*).

Konchoida bola prvou krivkou po priamke a kružnici, na súvislé narysovanie ktorej bol vytvorený špeciálny inštrument.

Pappus (3. st. n. l.) študoval kužeľosečky a v jeho dobe táto teória predstavovala vrchol matematických znalostí. Je prirodzené, že vyskúšal silu novej teórie na klasických problémoch. Pappusovo riešenie je založené na novom spôsobe nájdenia bodu E — bod E je rovnobežným priemetom priesečníka kružnice a hyperboly na priamku ZA v smere priamky AB (presnejšie pozri [2], [3]).

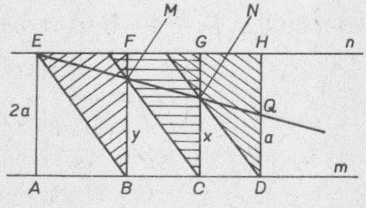
V predchádzajúcom texte sme ukázali všetky tri metódy „riešení“. Historické ilustrácie zakončíme ukážkou „riešenia“ problému zdvojenia kocky.

Problém zdvojenia kocky čiže nájdenia hrany kocky, ktorá má dvojnásobný objem ako pôvodná kocka s hranou a (riešenie rovnice $x = a\sqrt[3]{2}$) previedol Hippokrates z Chia (5. st. pr. n. l.) na ekvivalentnú úlohu — *nájdenie dvoch stredných geometrických úmerných medzi dvoma danými veličinami a, 2a*. Teda na nájdenie úsečiek x, y, ktoré sú s úsečkami a, $2a$ vo vzťahu

$$a : x = x : y = y : 2a$$

Zmenil tým stereometrickú úlohu na planimetrickú, ktorú sa snažili ďalej matematici rozriešiť.

Eratostenes (276—194 pr. n. l.) riešil túto úlohu pomocou prístroja „mezolabium“. Skladá sa z troch zhodných trojuholníkových alebo obdĺžnikových tabuliek, ktoré sa pohybujú medzi dvoma koľajnicami m, n. Ich



Obr. 3

vzdialenosť je $2a$. Na odvesne trojuholníka, nachádzajúceho sa úplne vpravo, vyznačíme úsečku $|QD| = a$. Potom pohybujeme trojuholníkmi medzi koľajnicami tak, aby priesečníky odvesny jedného trojuholníka s preponou nasledujúceho ležali na priamke EQ *(obr. 3)*.

Z podobnosti trojuholníkov dostávame:

$$\frac{a}{|NC|} = \frac{|NC|}{|MB|} = \frac{|MB|}{2a} \quad \text{čiže} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

kde x, y sú dve stredné geometrické úmerné.

Eratostenesovi už bolo známe aj použitie mezolabia na zovšeobecnenú úlohu, t. j. *na nájdenie n stredných geometrických úmerných sa použije* $(n+1)$ *zhodných tabuliek.*

Ukončili sme základný program analýzy. Pristúpime teraz k realizácii strategického motívu v pedagogickej praxi.

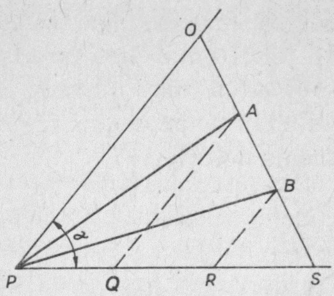
Obidva uvedené problémy je možné využiť ako silné strategické motívy. Predovšetkým formulujeme iba sám problém. Ak žiaci poukážu na jeho neriešiteľnosť (poznatok od rodičov či súrodencov), povieme triede toto: „Áno, tento problém je neriešiteľný, ale ja poznám vyše desať „skororiešení", ktoré v priebehu dvetisícročnej histórie vymysleli najväčšie matematické osobnosti. Pokúste sa aj vy nájsť nejaké, aspoň približné riešenie. Potom vám budem vedieť povedať, ako ďaleko ste sa dostali historicky."

Poznamenajme, že úspešná motivácia vyžaduje viac ako len formulovanie problému. Treba ukázať aspoň jeden príklad „riešenia", aby sa žiaci zorientovali.

Uvedeným pedagogickým prístupom som získala niekoľko žiackych riešení, z ktorých dve uvediem. Na ilustráciu som žiakom predviedla Bibikov agrometer [4] a tomahawk-trisektor [5].

Riešenie žiaka siedmeho ročníka ZDŠ

„Je daný uhol γ s vrcholom P. Na jedno rameno nanesieme trikrát ľubovoľnú dĺžku r. Dostaneme body Q, R, S. Na druhé rameno nanesieme dĺžku $3r$. Bod, ktorý dostaneme, označíme O. Spojíme body O a S priamkou. Bodmi Q a R vedieme rovnobežky s priamkou OP. Na priamke OS dostaneme body A, B. Priamky AP, BP rozdeľujú uhol na tri časti. Toto riešenie nie je presné." (Ukázal to rozdelením konkrétneho uhla a odčítaním tretín na uhlomere.)

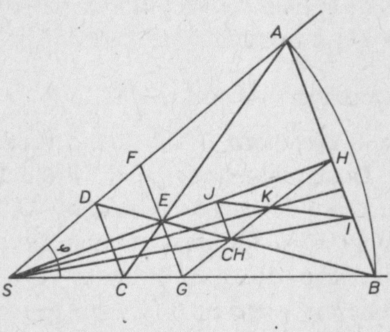


Obr. 4

Základnou myšlienkou tohto riešenia je prenesenie operácie delenia z úsečky na uhol.

Riešenie žiaka šiesteho ročníka ZDŠ

„Je daný uhol φ s vrcholom S. Z bodu S opíšeme časť kružnice, ktorá pretne ramená uhla v bodoch A, B. Dĺžku $|AB|$ prenesieme na rameno SB do bodu C. Bodom C vedieme rovnobežku CD s tetivou AB. Zostrojíme priamky AC, BD. Ich priesečník označíme E. Priamka SE vlastne rozdeľuje daný uhol na dve rovnaké časti. Bodom E vedieme priamku FG rovnobežne s AB. $EB \cap GH = CH$ $(H = ES \cap AB)$. Bod CH spojíme s bodom S. Priamka SCH pretína priamku AB v bode I. Bodom CH vedieme rovnobežku CHJ s priamkou AB. Priamka JI pretína priamku HCH v bode K. Bod K spojíme s bodom S. A takto to robíme ďalej, až dostaneme uhol rozdelený na tri časti.“



Obr. 5

Je zrejmé, že riešenie intuitívne smeruje k limite. Žiak už asi rok poznal príhodu Achilles a korytnačka, ktorá ho pravdepodobne mohla inšpirovať k uvedenému riešeniu.

Vecnú analýzu riešení necháme na čitateľa. V prvom prípade treba určiť ochýlku skonštruovanej „tretiny" od skutočnej tretiny daného uhla. V druhom prípade je potrebné určiť, k akej limite smeruje konštrukcia a akých chýb sa žiak pri konštrukcii dopustil.

Na záver sa obraciam s prosbou na učiteľov, aby poskytli autorke článku zaujímavé žiacke riešenia uvedených problémov a prípadné pokusy a skúsenosti so „strategickými motívmi", pretože sa uvedenou problematikou mienim ďalej zaoberať.

Literatúra

[1] Hejný, M.: Strategická motivácia, MaF ve škole (v tlači).

[2] Belozerov, S. E.: Pjať znamenitych zadač drevnosti. Izd. Rostovskovo univerziteta 1975.

[3] Coolidge, J. L.: The mathematics of great amateurs. Oxford 1949.

[4] Jednoduchý trisektor uhlov, MaF ve škole, 6, 1978, SPN Praha.

[5] Gardner, M.: Mathematical Carnival. Vintage Books Edition, April 1977.

[6] Breidenbach, W.: Das Delische Problem. Leipzig 1952.

[7] Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku. Praha 1969.

[8] Erdniev, P. M.: Prepadavanie matematiki v škole. Moskva 1978.