ZOVŠEOBECNENIE POJMU SÚMERNOSTI

MÁRIA SABOLOVÁ, Bratislava

Pojem „modernizácia matematiky" neznamená len zavádzanie jazyka teórie množín do matematických disciplín, ale aj rozumnú geometrizáciu algebry a algebraizáciu geometrie, o čo sa pokúsime v predloženom článku. Budeme v ňom študovať vzájomné súvislosti medzi istým zobrazením a ním asociovanou operáciou, čo je zovšeobecnenie pojmu súmernosti.

Definícia 1. Neprázdna množina G, na ktorej je definovaná binárna operácia, sa nazýva grupoid.

Definícia 2. Grupoid G sa nazýva kvázigrupa, ak pre každé dva prvky $a, b \in G$ majú rovnice $a . x = b$, $y . a = b$ práve jedno riešenie.

(V uvedených rovniciach . znamená binárnu operáciu.)

Ak pre každé $a \in G$ $a . a = a$, hovoríme o idempotentnej kvázigrupe.

Definícia 3. Nech τ je množina všetkých zobrazení množiny reálnych čísel R do seba. Budeme hovoriť, že zobrazenie $f: R \to \tau$; $a \mapsto f_a$ je asociovaná s binárnou operáciou $\varphi: R^2 \to R$, ak pre každé $x, y \in R$

$$\varphi(x, y) = z (z \in R) \Leftrightarrow f_z(x) = y \tag{1}$$

Dvojicu (f, φ) budeme stručne nazývať *asociovaný pár.*

Príklad 1. Nech f je zobrazenie $R \to \tau$ dané predpisom $f_a(x) = 2a - x$ a nech φ je zobrazenie $R^2 \to R$ také, že $(x, y) \mapsto (x + y)/2$. Potom f a φ sú asociované.

Veta 1. Nech (f, φ) je asociovaný pár. Označme $F_a = \{(x; f_a(x)) : x \in R\} \subset R^2$ graf funkcie f_a. Potom systém $\{F_a;\ a \in R\}$ tvorí disjunktný rozklad množiny R^2.

Dôkaz. Treba ukázať, že každý bod (x, y) patrí práve do jednej množiny F_a v danom rozklade.

Z (1) vyplýva, že pre $a = \varphi(x, y)$ je $(x, y) \in F_a$. Ak by $(x, y) \in F_b$, t. j. $y = f_b(x)$, potom podľa (1) $b = \varphi(x, y) = a$.

Veta 2. Nech (f, φ) je asociovaný pár. Potom:

a) Pre ľubovoľné $a, b \in R$ rovnica $\varphi(a, y) = b$ má práve jedno riešenie.

b) Pre každé $a \in R$ rovnica $\varphi(x, a) = b$ má aspoň jedno riešenie práve vtedy, keď f_b je surjektívne.

c) Pre každé $a \in R$ má rovnica $\varphi(x, a) = b$ najviac jedno riešenie práve vtedy, keď f_b je injektívne.

Dôkaz. a) Z (1) vyplýva, že $y = f_b(a)$ je jediné riešenie rovnice $\varphi(a, y) = b$.

b) Nech f_b je surjektívne, potom existuje x tak, že $f_b(x) = a$ a podľa (1) $\varphi(x, a) = b$.

Nech rovnica $\varphi(x, a) = b$ má riešenie pre každé a z R, t. j. existuje také x, že $f_b(x) = a$. To znamená, že množina $f_b^{-1}(a)$ je neprázdna, lebo obsahuje riešenie x, ktoré podľa predpokladu o φ existuje. Teda f_b je surjektívne.

c) Nech f_b je injektívne a nech x_1, x_2 sú riešenia rovnice $\varphi(x, a) = b$. Potom podľa (1) je $f_b(x_1) = a = f_b(x_2)$. Pretože f_b je injektívne, $x_1 = x_2$.

Ak $f_b(x_1) = f_b(x_2)$, potom pri označení $f_b(x_1) = a$ platí $\varphi(x_1, a) = b = \varphi(x_2, a)$, odkiaľ $x_1 = x_2$.

Dôsledok. Nech (f, φ) je asociovaný pár, v ktorom f_b je bijektívne pre každé $b \in R$. Potom (R, φ) je kvázigrupa.

Veta 3. Nech (f, φ) je asociovaný pár taký, že (R, φ) je kvázigrupa. Potom:

(2) (R, φ) je komutatívna práve vtedy, keď $f_a^2 = 1$ pre každé $a \in R$.

(3) (R, φ) je idempotentná práve vtedy, keď $f_a(a) = a$, pre každé $a \in R$.

Dôkaz. Nech (R, φ) je komutatívna kvázigrupa. Zvoľme ľubovoľné $x \in R$ a označme $f_a(x) = y$. Potom podľa (1) je $a = \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, odkiaľ $f_a(y) = x$, t. j. $f_a^2(x) = x$. Nech $f_a^2 = 1$ pre každé $a \in R$. Zvoľme ľubovoľné $x, y \in R$ a označme $\varphi(x, y) = a$. Potom $f_a(x) = y$, čiže $x = f_a^2(x) = f_a(y)$, t. j. $x = f_a(y)$, teda $a = \varphi(y, x)$.

(3) Priamo podľa (1) je $f_a(a) = a$ ekvivalentné s $\varphi(a, a) = a$.

Definícia 4. Asociovaný pár (f, φ) nazveme *involutórnym*, ak (R, φ) je komutatívna idempotentná kvázigrupa.

Príklad 2. Definujme zobrazenie $f: R \to \tau$ predpisom $f_a(x) = (a - \alpha x)/$ $/\beta$ a binárnu operáciu φ predpisom $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y$, kde α, $\beta \neq 0$ sú ľubovoľné reálne čísla. Ľahko sa preverí, že (f, φ) je asociovaný pár. Pre tento pár platí:

Kvázigrupa (R, φ) je komutatívna, t. j. $f_a^2 = 1$ pre každé $a \in R$ práve vtedy, keď $\alpha = \beta$.

Kvázigrupa (R, φ) je idempotentná, t. j. $f_a(a) = a$ pre každé $a \in R$ práve vtedy, keď $\alpha + \beta = 1$.

Z príkladu 2 vyplýva, že existuje asociovaný pár (f, φ) pre ktorý nie je (R, φ) ani komutatívna, ani idempotentná kvázigrupa. Ďalej z príkladu vidieť, že obidve vlastnosti (2) a (3) sú nezávislé.

Príklad 3. Na R definujeme φ predpisom

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (x+y)/2, & \text{ak } |x+y| \neq 2 \\ 1, & \text{ak } [x+y=2 \wedge x \in Q] \vee [x+y=-2 \wedge x \in R-Q] \\ -1, & \text{ak } [x+y=2 \wedge x \in R-Q] \vee [x+y=-2 \wedge x \in Q] \end{cases}$$

a zobrazenie $f: R \to \tau$ predpisom

$$f_z(x) = \begin{cases} 2z - x & [|z| \neq 1] \vee [|z| = 1 \wedge x \in Q] \\ -2z - x & [|z| = 1 \wedge x \in R - Q] \end{cases}$$

Potom (f, φ) je involutórny pár a φ nie je spojitá.

Veta 4. Nech (f, φ) je involutórny pár. Ak je f_a spojitá, potom je klesajúca.

Dôkaz. Zo spojitosti a jedno-jednoznačnosti f_a vyplýva, že je rýdzo monotónna. Nech f_a je rastúca a $b \neq a$. Potom $f_a(b) \neq b$, lebo inak by množiny F_a, F_b mali spoločný prvok (b, b), čo odporuje vete 1. Teda $f_a(b) < b$, alebo $f_a(b) > b$. Ak $f_a(b) < b$ a f_a je rastúca, dostávame $b = f_a^2(b) < f_a(b)$, čo je spor. Podobne ak $f_a(b) > b$. Teda f_a je klesajúca.

Veta 5. Nech (f, φ) je involutórny pár. Ak je f_a spojitá pre každé $a \in R$, potom $\varphi: R^2 \to R$ je spojitá.

Dôkaz. Podľa definície spojitosti, zobrazenie $f: R^m \to R^n$ je spojité práve vtedy, keď pre každú otvorenú podmnožinu $B \subset R^n$ je $f^{-1}(B)$ otvorená množina.

Nech $U = (\alpha, \beta) \subset R$ je otvorený interval. Treba dokázať, že $\varphi^{-1}(U)$ je otvorená množina v R^2. Označme $\mathcal{F}_\alpha^+ = \bigcup\limits_{z > \alpha} F_z$, $\mathcal{F}_\alpha^- = \bigcup\limits_{z < \alpha} F_z$. Dokážeme, že $\mathcal{F}_\alpha^+$ a $\mathcal{F}_\alpha^-$ sú otvorené v R^2 pre každé α a že $\varphi^{-1}(U) = \mathcal{F}_\alpha^+ \cap \mathcal{F}_\beta^-$.

Krivka F_α rozdelí rovinu na dve disjunktné podmnožiny $\mathcal{F}^+_\alpha$ a $\mathcal{F}^-_\alpha$. Ak je $A=(a, b)\in \mathcal{F}^+_\alpha$, potom vzhľadom na spojitosť funkcie f_α existuje min $d(A, F_\alpha)=\varrho$. Potom okolie $O_\varrho(A)$ bodu A patrí do $\mathcal{F}^+_\alpha$, lebo v opačnom prípade by sa grafy funkcií F_α a F_ξ, kde $\xi=\varphi(a', b')$ $[d\{(a', b'), A\}<\varrho]$ preťali, čo odporuje vete 1. Teda $\mathcal{F}^+_\alpha$ je otvorená množina. Analogicky pre $\mathcal{F}^-_\alpha$.

Ak teraz

$$(x, y)\in\varphi^{-1}(U)\Rightarrow\varphi(x, y)\in U\Rightarrow\alpha<\varphi(x, y)<\beta,$$

$$(x, y)\in\mathcal{F}^+_\alpha=\bigcup_{z>\alpha}F_z\Rightarrow\exists z>\alpha:(x, y)\in F_z\Rightarrow\varphi(x, y)=z>\alpha$$

$$(x, y)\in\mathcal{F}^-_\beta=\bigcup_{z<\beta}F_z\Rightarrow\exists z<\beta:(x, y)\in F_z\Rightarrow\varphi(x, y)=z<\beta$$

Teda $\varphi^{-1}(U)=\mathcal{F}^+_\alpha\cap\mathcal{F}^-_\beta$.

V príklade 2 sme videli celú sériu asociovaných párov $(f_r\varphi)$. Ľahko sa zistí, že z nich len pár, daný parametrami $\alpha=\beta = 1/2$ je involutórny. V uvedenom prípade sú navyše splnené ešte ďalšie vlastnosti, ktoré v jazyku kvázigrupy (R, φ) možno formulovať takto:

(R, φ) je:

distributívna, t. j. $\varphi[a ; \varphi(b, c)]=\varphi[\varphi(a, b) ; \varphi(a, c)]$
elastická, t. j. $\varphi[a ; \varphi(b, a)] = \varphi[\varphi(a, b) ; a]$
mediálna, t. j. $\varphi[\varphi(a, b) ; \varphi(c, d)] = \varphi[\varphi(a, c) ; \varphi(b, d)]$

Je otázne, či uvedené vlastnosti má každá kvázigrupa (R, φ), príslušná k involutórnemu páru (f, φ).

Príklad 4. Nech na R je definovaný involutórny pár (f,φ) predpismi

$$\varphi(x, y)=(1/3)\min(x, y)+(2/3)\max(x, y)$$

a $$f_a(x)=(9/4)a-(5/4)x-(3/4)\,|a-x|$$

Čitateľ sa ľahko presvedčí, že (R, φ) nie je ani distributívna, ani mediálna.

Veta 6. Ak (f, φ) je involutórny pár, potom (R, φ) je elastická kvázigrupa.

Dôkaz. Zvoľme $a, b \in R$. Potom dvojnásobným použitím komutativity φ dostaneme:

$$\varphi[a; \varphi(b, a)] = \varphi[a; \varphi(a, b) = \varphi[\varphi(a, b); a]$$

Funkcie f, φ uvedené v príklade 4 sú síce spojité, ale nie sú diferencovateľné. V nasledujúcom príklade sa uvádza taký involutórny pár (f, φ), pre ktorý f aj φ majú derivácie všetkých rádov.

Príklad 5. Nech je na R definovaný involutórny pár (f, φ) predpisom:

$$f_a(x) = -5x/4 + 9a/4 - 9/8 + 3/4\sqrt{(x + 1/2 - a)^2 + 2}$$

a

$$\varphi(x, y) = 1/2 - (1 + x + y) + 1/3\sqrt{17(x^2 + y^2 + 1) + 36(x + y) + 38xy}$$

Funkcie f_a (pre každé $a \in R$) a φ majú derivácie všetkých rádov.

Literatúra

Belousov: Osnovy teorii kvazigrup i lup Izd. Nauka, Moskva 1967.

Sikorski: Diferenciální a integrální počet (funkce více proměnných). Academia, Praha 1973.