ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Tomáš Hecht, Matematický pavilón, Mlynská dolina, 816 31 Bratislava
Riešenie úloh zasielajte na adresu vedúceho rubriky do 28.2.1978.

B 45. Ku každému reálnemu číslu a priradíme zobrazenie

$$f_a : R \to R; \quad x \mapsto \frac{1}{4}(9a - 5x - 9 + 3\sqrt{(x+1-a)^2+8})$$

a) Dokážte, že existuje binárna operácia $g : R \times R \to R$ tak, že

$$\forall a, x, y \in R; \quad f_a(x) = y \Leftrightarrow a = g(x, y)$$

b) Nájdite množinu všetkých tých $x \in R$, pre ktoré je číslo $f_a(f_a(x))$ racionálne pre aspoň jedno $a \in R$.

M. Hejný

B 46. Daná je množina M a na nej dve binárne operácie f, g tak, že sú splnené tieto tri podmienky; $\forall x, y \in M$ platí:

(*i*) $f(x, x) = x$
(*ii*) $g(x, g(x, y)) = y$
(*iii*) $f(g(x, y), y) = x$

Zistite, či potom musí byť splnená aj podmienka

(*iv*) $g(f(x, y), y) = x$

M. Hejný

B 47. Nech r, s sú dve otáčania v rovine E^2, ktorých stredy sú rôzne. Nájdite všetky izometrie w, pre ktoré $r_0 w = w_0 s$

M. Hejný

B 48. Nech $(R, +, .)$ je okruh. Ak $(R, +)$ je cyklická grupa, potom okruh $(R, +, .)$ je komutatívny. Dokážte!

T. Hecht

B 49. Nech $(R, +, .)$ je okruh. Prvok $r \in R$ nazveme ľavým (pravým) deliteľom nuly, ak $r \neq 0$ a existuje $s \in R$ $s \neq 0$ tak, že platí $r \,.\, s = 0$ ($s \,.\, r = 0$). Zistite, či platí implikácia: r je ľavým deliteľom nuly, $\Rightarrow r$ je pravým deliteľom nuly.

T. Hecht

B 50. Máme n rovnakých odmeriek po okraj naplnených n rôznymi kvapalinami a jednu prázdnu odmerku. Možno konečným počtom operácií vytvoriť rovnomerné zmesi v každej z n odmeriek (t. j. dosiahnuť, aby v každej odmerke bolo práve $\frac{1}{n}$ pôvodného množstva každej kvapaliny a pritom jedna odmerka zostala prázdna)?
Poznámka: Odmerka má stupnicu, ktorá dovoľuje merať objem naliatej kvapaliny.

Úloha z 27. ročníka
Moskovskej matem. olympiády.