

ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, 92 101 Piešťany, Lúčna 14; úlohy spolu s riešeniami prosíme posielat na jeho adresu.

Úloha 3 (autor V. Filo).

Zostrojte graf binárnej relácie $U = \{[x, y] \in R \times R, y \geq 4|x+1| + |x-3| - 2|x-1| - |x+4|\}$.

Riešenie: Zostrojme najprv graf funkcie $y = 4|x+1| + |x-3| - 2|x-1| - |x+4|$. Funkcia rozdelí číselnú os na tieto intervaly: $(-\infty, -4)$, $(-4, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$.

a) Nech $x \in (-\infty, -4) \Rightarrow (x \leq -4 \wedge x \leq -1 \wedge x \leq 3 \wedge x \leq 1) \Rightarrow (x+4 \leq 0 \wedge x-1 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0) \Rightarrow y = -4x - 4 - x + 3 + 2x - 2 + x + 4 \Rightarrow y = -2x + 1$. Grafom je polpriamka \overline{AB} , kde $A = [-4, 9]$, $B = [-5, 11]$.

b) $x \in (-4, -1) \Rightarrow (x > -4 \wedge x \leq -1 \wedge x \leq 1 \wedge x \leq 3) \Rightarrow (x+4 > 0 \wedge x+1 \leq 0 \wedge x-1 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0) \Rightarrow y = -4x - 7$. Grafom je úsečka \overline{AC} , kde $C = [-1, -3]$.

c) $x \in (-1, 1) \Rightarrow (x > -4 \wedge x > -1 \wedge x \leq 1 \wedge x \leq 3) \Rightarrow (x+4 > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge x-1 \leq 0 \wedge x-3 \leq 0) \Rightarrow y = 4x + 1$. Grafom je úsečka \overline{CD} , kde $D = [1, 5]$.

d) $x \in (1, 3) \Rightarrow (x > -4 \wedge x > -1 \wedge x > 1 \wedge x \leq 3) \Rightarrow (x+4 > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge x-3 \leq 0) \Rightarrow y = 5$. Grafom je úsečka \overline{DE} , kde $E = [3, 5]$.

e) $x \in (3, \infty) \Rightarrow (x > -4 \wedge x > -1 \wedge x > 1 \wedge x > 3) \Rightarrow (x-4 > 0 \wedge x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge x-3 > 0) \Rightarrow y = 2x - 1$. Grafom je polpriamka \overline{EF} , kde $F = [6, 11]$.

Pomocou niektorého bodu v rovine zistíme, ktorá časť roviny je grafom relácie U (nakreslite obrázok!).

Úloha 4 (autor V. Filo).

Zostrojte graf relácie $V = \{[x, y] \in R \times R, y \geq |2-x| + |x^2-1|\}$.

Riešenie: Zostrojme graf funkcie $f: y = |2-x| + |x^2-1|$. Tá rozdelí číselnú os na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$.

a) Nech $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow (x \leq -1 \wedge x \leq 1 \wedge x \leq 2) \Rightarrow (x+1 \leq 0 \wedge x-1 \leq 0 \wedge 2-x \geq 0) \Rightarrow (2-x \geq 0 \wedge x^2-1 \geq 0) \Rightarrow y = x^2 - x + 1$. Ak túto funkciu derivujeme, dostaneme $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ pre všetky $x \in (-\infty, -1)$, teda funkcia f je klesajúca na tomto intervale. Zostavíme tabuľku:

x	-3	-2	-1
y	13	7	3

b) $x \in (-1, 1) \Rightarrow (x > -1 \wedge x \leq 1 \wedge x \leq 2) \Rightarrow (x+1 > 0 \wedge x-1 \leq 0 \wedge 2-x < 0) \Rightarrow (2-x \geq 0 \wedge x^2-1 \leq 0) \Rightarrow y = -x^2 - x + 3; f'(x) = -2x - 1 \Rightarrow (f'(x) =$

$= 0 \Leftrightarrow x = -1/2$ a $f''(x) = -2$. Funkcia má v bode $x = -1/2$ lokálne maximum. Zostavíme tabuľku:

x	$-1/2$	0	$1/2$	1
y	$13/4$	3	$9/4$	1

c) $x \in (1, 2) \Rightarrow (x > -1 \wedge x > 1 \wedge x \leq 2) \Rightarrow (x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge 2-x \geq 0) \Rightarrow (2-x \geq 0 \wedge x^2-1 > 0) \Rightarrow y = x^2 - x + 1; f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (1, 2)$ a f je rastúca v tomto intervale. Zostavíme tabuľku:

x	$3/2$	2
y	$7/4$	3

d) $x \in (2, \infty) \Rightarrow (x > -1 \wedge x > 1 \wedge x > 2) \Rightarrow (x+1 > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge 2-x < 0) \Rightarrow y = x^2 + x - 3; f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (2, \infty) \Rightarrow f$ je rastúca na tomto intervale.

Zostavíme tabuľku:

x	3	4
y	9	17

Graf relácie teraz nájdeme podobne ako v úlohe 3.