METRICKÝ PRIESTOR DOMINO

MÁRIA INCZÉDIOVÁ, Bratislava

Článok podáva hlavné výsledky práce ŠVOČ, s ktorou sa autorka zúčastnila v súťaži v šk. roku 1978/79. Výsledky práce je možné využiť vo vyučovaní matematiky v rôznych záujmových útvaroch, prípadne na nepovinnej matematike. Tematika vychádza z článku [1] príklad 4. Tvrdenia uvádzame bez dôkazov. Ako ilustráciu uvádzame dôkaz vety 3.

Polyminom nazveme každý obdĺžnik v rovine R^2, ktorého strany ležia na priamkach celočíselnej siete Z^2. Polymino je teda množina

$$\square(p,m;q,n)=\{(x,y)\in R^2;\, p\leqq x\leqq p+m,\ q\leqq y\leqq q+n\}\quad m,n\in N, p,q\in Z$$

Skutočnosť, že „x-ový rozmer" obdĺžnika $z=\square(p,m;q,n)$ je m a „y-ový rozmer" je n, označíme $\tau(z)=(m,n)$ a povieme, že z je typu mxn.

Na množine D všetkých polymín zavedieme metriku predpisom

$$\mathrm{d}\colon D \times D \to N\cup\{O\},\quad (x,y)\mapsto \mu(x\cup y)-\mu(x\cap y)$$

kde μ je miera = obsah rovinného útvaru; napríklad pre $z\in \mathrm{D}$, pre ktoré $\tau(z)=(m,n)$, je $\mu(z)=mn$. Ďalej pracujeme v metrickom priestore (D,d) domino, o ktorom je písané v článku [1].

V priestore (D,d) podobne ako v euklidovskej rovine definujeme kružnicu predpisom:

$$k(s,r)=\{z\in D\colon d(s,r)=r\}$$

Ľahko sa presvedčíme, že množina bodov kružnice $k(s,r)$ je nekonečná, práve keď $\mu(s)\leqq r$. Cieľom tohto článku je vypočítať číslo card $k(s,r)$ v prípade $\mu(s)\geqq r$.

Odteraz až do konca článku pod číslom rozumieme iba celé číslo.

Kružnica, ktorú vyšetrujeme, má fixné označenie $k(s,r)$, pričom $\tau(s)=$ $=(m,n)$, $mn \geqq r$. Súradnicová sústava je zvolená tak, že $s=$ $=\square(0,m;0,n)$.

Lema 1: Nech $x,y \in D$. Potom parita čísel $d(x,y)$ a $\mu(x)+\mu(y)$ je rovnaká.

Lema 2: Nech $m=1$ a $r<n$. Ak $z \in k(s,r)$, tak $\tau(z)=(1,q)$, $q \in N$. Z lemy 1 a lemy 2 sa dá dokázať:

Veta 1: Nech $m=1$ a $r<n$. Potom card $k(s,r)=4r$.

Veta 2: Nech $m=1$ a $r=n$. Potom card $k(s,r)=r^2+4r-1$.

Na zjednodušenie ďalších úvah je vhodné urobiť určitú klasifikáciu bodov kružnice. Použijeme kritérium priemetu budu=polymina do súradnicových osí. Nech $z=\square(p,m;q,n)$ je polymino. Potom označíme

$$p_1(z)=[p,p+m]_1,\quad p_2(z)=[q,q+n]_2$$

prvý a druhý priemet polymina z do osi x a do osi y. Symbol $[u,v]_1$ značí úsečku $[(u,0),(v,0)]$ a symbol $[u,v]_2$ značí úsečku $[(0,u),(0,v)]$.

Pre $i=1,2$ a množinu $M=\{z \in D: \mu(z \cap s) \neq 0\}$ zavádzame označenie

$\alpha_i[M]=\{z \in M: p_i(z)=p_i(s)\}$
$\beta_i[M]=\{z \in M: p_i(z) \subsetneqq p_i(s)\}$
$\gamma_i[M]=\{z \in M: p_i(z) \supsetneqq p_i(s)\}$
$\delta_i[M]=M-(\alpha_i[M] \cup \beta_i[M] \cup \gamma_i[M])$

Polymino $z \in k(s,r)$ nazveme bodom typu
A, ak $z \in \alpha_1[k] \cup \alpha_2[k]$
B, ak $z \in \beta_1[k] \cup \beta_2[k]-(\alpha_1[k] \cup \alpha_2[k])$
C, ak $z \in \gamma_1[k] \cap \gamma_2[k]$
D, ak $z \in (\gamma_1[k] \cup \delta_1[k] \cap \gamma_2[k] \cup \delta_2[k])-(\gamma_1[k] \cap \gamma_2[k])$

Prehľadne túto klasifikáciu nájdeme v *tabuľke 1*.

$A[M]=\{x \in M: x \text{ je typu } A\}$

Veta 3: Nech $r<n$ a $\frac{r}{m}=t \in N$. Nech s_1 je ľubovoľný bod typu $1xn$. Potom card $\alpha_1[k(s,r)]=$ card $k(s_1,t)=4t$.

Analogicky, keď $r<m$ a $\frac{r}{n}=t \in N$, potom card $\alpha_2[k(s,r)]=$ card $k(s_2,t)$, kde s_2 je ľubovoľný bod typu $mx1$.

Dôkaz. Označme $D_i=\{z \in D: \tau(z)=(i,k), k$ je ľubovoľné číslo$\}$ Pre

Tabuľka 1

	α_1	β_1	γ_1	δ_1
α_2	A	A	A	A
β_2	A	B	B	B
γ_2	A	B	C	D
δ_2	A	B	D	D

každé $m \in N$ definujeme zobrazenie $\varphi_m : D_1 \to D_m$ predpisom ak

$$z = \square(p,1;q,n), \text{ tak } z\varphi_m = \square(p,m;q,n).$$

Nech a_1, $b_1 \in D_1$, $\mu(a_1 \cap b_1) \neq 0$, $a_1\varphi_m = a_m$, $b_1\varphi_m = b_m \in D_m$.

Platí

$d(a_1,b_1) = t \Rightarrow d(a_m,b_m) = mt$, t. j bod a_1 kružnice $k(s_1, t)$ sa zobrazí do bodu a_m kružnice $k(s_m, mt)$, $s_m = s_1\varphi_m$.

Zobrazenie $\varphi_m : k(s_1,t) \to \alpha_1[k(s_m,mt)]$ je bijektívne, lebo platí: $\forall z \in \alpha_1[k(s_m,mt)]$; $p_1(s) = p_1(z) = [0,m]_1$, teda existuje inverzné zobrazenie $\varphi_m^{-1} : \alpha_1[k(s_m,mt)] \to k(s_1,t)$ $z_m\varphi_m^{-1} = z_1$, a tým je dôkaz ukončený. (Druhá rovnosť je dôsledkom vety 1.)

Dôsledok: Kružnica k má body typu A vtedy a len vtedy, keď $\frac{r}{n} \in N$ alebo $\frac{r}{m} \in N$.

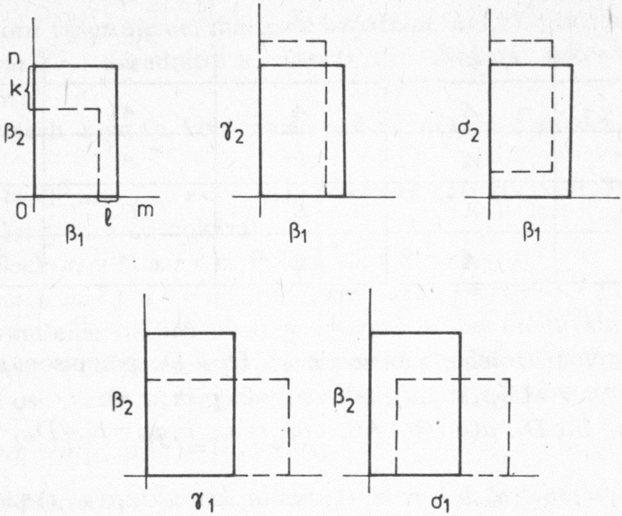
Skúmajme teraz, aké podmienky musia platiť, aby kružnica k mala body typu B. Piatim okienkam *tabuľky 1* zodpovedá týchto 5 obrázkov (*obr. 1*).

Ďalej uvažujeme o bode z, ktorý symbolicky vyjadríme v tvare $\square(x_1, x_2 - x_1; y_1, y_2 - y_1)$ (*obr. 2*).

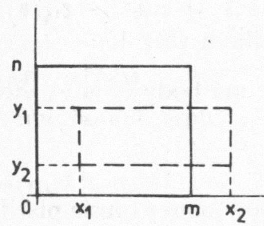
Označme $|x_1| + |x_2 - m| = l$, $|y_1| + |y_2 - n| = k$. Nech bod z je typu B. Potom polomer r môžeme vyjadriť v tvare $r = d(s,z) = km + ln - kl$.

Veta 4: Platí:

$$\text{card } B[k(s,r)] = \sum_{i=1}^{p} [4k_i(l_i+1) + 4l_i(k_i+1) - (k_i+1)(l_i+1)]$$



Obr. 1



Obr. 2

kde sumácia prebieha cez všetky riešenia ($k_i, l_i \in N$) diofantickej rovnice (r).

$$(r) \quad r = mk_i + nl_i - k_i l_i \quad 0 < l_i < m, \quad 0 < k_i < n$$

pričom počet riešení označíme p.

Vo vzorci $4k_i(l_i + 1)$ znamená počet bodov typu β_1, $4l_i(k_i + 1)$ je počet bodov typu β_2 a $(k_i + 1)\ (l_i + 1)$ je počet bodov, ktoré sú typu β_1 aj β_2 (a boli dvakrát počítané). Dôkaz ozrejmíme na príklade.

Príklad: Vypočítajme počet bodov typu B kružnice $k(s,6)$, $\tau(s)=(3,4)$.

Riešenie: Nájdeme jeden bod z typu B (napr. prvý priemet je typu β) daný priemetmi $p_1(z)=[0,2]_1$, $p_2[z]=[0, 5]_2$. Všimnime si, že bod z je bodom kružnice $k(\bar{s},2)$, kde bod $\bar{s}$ je daný podmienkami $p_1(\bar{s})=p_1(z)$, $p_2(\bar{s})=p_2(s)$. Platí $\bar{s}\subset s$, $\tau(\bar{s})=(2,4)$ a $d(s,z)=d(\bar{s},s)+d(\bar{s},z)=4+2=$ $=6$. $\bar{s}$ môže byť umiestnené dvoma spôsobmi: $p_1(\bar{s})=[0,2]_1$ alebo $p_1(\bar{s})=[1,3]_1$. Každý bod z $\beta_1[k(s6)]$, $\tau(s)=(3,4)$ môžeme chápať ako bod z $\alpha_1[k(\bar{s},2)]$. Teda card $\beta_1[k(s,6)]=2\text{card }\alpha_1[k(\bar{s},2)]$. Podľa vety 3 a vety 1:

$$2\text{ card }\alpha_1[k(\bar{s},2)]=2\ \mathit{card}\ k(s_1,1)=2.4=8.$$

kde $\tau(s_1)=(1,4)$.

Podobne môžeme určiť aj card $\beta_2[k(s,6)]=8$.

Body, ktoré sú typu β_1 aj β_2 sme dvakrát počítali. Pre tieto body z platí

$$(p_1(z)=[0,2]_1\vee p_1(z)=[1,3]_1)\wedge$$
$$\wedge\,(p_2(z)=[0,3]_2\vee p_2(z)=[1,4)_2)$$

Teda ich počet je 4.

$$\text{card } B\,[k(s,6)]=8+8-4=12,\ \text{kde}\ \tau(s)=(3,4)\,.$$

Keď pri riešení rovnice (r) pripustíme aj nulové riešenia ($l_i=0$, $k_i=k$, resp. $k_i=0$, $l_i=l$) dostaneme body typu A. Vzorec na určenie počtu bodov typu C a D nájdeme podobne ako pre typ B. Ich súčet dá celkový počet bodov kružnice.

Veta 5: Platí:

$$\text{card } k(s,r)=\sum_{i=1}^{p}[4k_i(l_i+1)+4l_i(k_i+1)-(k_i+1)\,(l_i+1)\text{ sgn } k_il_i]+$$

$$+\sum_{j=1}^{p_1}(k_j+1)\,(l_j+1)+\sum_{z=1}^{p_2}2(k_z+1)+\sum_{t=1}^{p_3}2(l_t+1)+4p_4$$

kde p je počet riešení diofantickej rovnice

$$(1)\qquad r=mk_i+nl_i-k_il_i\,,\qquad 0\leqq k_i<n,\quad 0\leqq l_i<m\,,$$

p_1, p_2, p_3, p_4 označuje počet riešení diofantickej rovnice

$$(2)\qquad r=mu+mk-vk+nl-ul+nv-uv+kl$$

$(l = |p_1(z) - p_1(s)|$, $v = |p_1(s) - p_1(z)|$, $k = |p_2(z) - p_2(s)|$,

$u = |p_2(s) - p_2(z)|$—, kde značí množinový rozdiel a absolútne hodnoty značia dĺžku danej úsečky), pričom

pre p_1 je $u = 0$, $v = 0$,
pre p_2 je $u = 0$, $v = 1,2,\dots,m-1$,
pre p_3 je $u = 1,2,\dots,n-1$, $v = 0$,
pre p_4 je $u = 1,2,\dots,n-1$, $v = 1,2,\dots,m-1$ a
$0 < k < n$, $0 < l < m$.

Príklad: Určme počet bodov kružnice $k(s,18)$, keď $\tau(s) = (4,5)$.
Riešenie: Do rovnice (1) dosadíme $m = 4$, $n = 5$, $r = 18$.

$4k_i + 5l_i - k_il_i = 18$, t. j. $(4 - l_i)(5 - k_i) = 2$ — riešenia sú $l_1 = 3$, $k_1 = 3$; $l_2 = 2$, $k_2 = 4$.

(2) pre $u = v = 0$.

$4k_j + 5l_j + k_jl_j = 18$, t. j. $(4 + l_j)(5 + k_j) = 38$.

Táto rovnica nemá kladné riešenie.
(2) pre $u = 0$, $v = 1$.

$$4k_z - k_z + 5l_z + 5 + k_zl_z = 18$$
$$3k_z + 5l_z + k_zl_z = 13,$$

t. j.
$(3 + l_z)(5 + k_z) = 28$, $l_1 = 1$, $k_1 = 2$.

(2) pre $u = 0$, $v = 2$.

$$4k_z - 2k_z + 5l_z + 10 + k_zl_z = 18$$
$$2k_z + 5l_z + k_zl_z = 8,$$

t. j.
$(2 + l_z)(5 + k_z) = 18$, $l_2 = 1$, $k_2 = 1$.

(2) pre $u = 0$, $v = 3$ nemá kladné riešenie.
(2) pre $u = 1$, $v = 0$.

$$4 + 4k_t + 5l_t - l_t + k_tl_t = 18$$
$$4k_t + 4l_t + k_tl_t = 14, \text{ t. j.}$$

$$(4+l_t)(4+k_t)=30\,, \qquad l_1=1,\ k_1=2\,;\ l_2=2,\ k_2=1\,.$$

(2) pre $u=2{,}3{,}4$, $v=0$ nemá vyhovujúce riešenie.

(2) pre $u \neq 0 \neq v$ má jediné riešenie, a to pre $u=2$, $v=1$ je $k=1$, $l=1$.

Príslušné hodnoty dosadíme do vzorca z vety 5:

Dostaneme:

$$\text{card } k(s,18)=4.3.(3+1)+4.3.4-4.4+4.4.3+4.2.5-5.3+2.3+$$
$$+2.2+2.2+2.3+4=177$$

Počet bodov kružnice $k(s, 18)$, $\tau(s)=(3{,}4)$ je 177.

Literatúra

[1] Hejný, M.: Metrické geometrie I, Matematické obzory 6/1974.

[2] Golomb, S. V.: Polimino. Moskva 1975.