TOLERANČNÍ PROSTORY

JIŘINA PLAČKOVÁ, Brno

Tento příspěvek navazuje na článek *Relace tolerance* (viz [4] v seznamu literatury). Připomeňme si některé základní pojmy, které byly v tomto článku zavedeny. Tolerance T v dané množině M je binární relace, která je reflexivní a symetrická. Tzv. podtřída tolerance T v dané množině M je taková podmnožina množiny M, jejíž každé dva prvky jsou v toleranci. Třída K tolerance T v množině M je podtřída s touto vlastností: Ke každému prvku $x \in M$, který nepatří do K, existuje prvek $y \in K$, který s prvkem x není v toleranci. Systém všech tříd tolerance tvoří pokrytí dané množiny. Tranzitivní tolerance je ekvivalence.

Předpokládejme nyní, že je dána tolerance T v konečné množině $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a pokusme se najít všechny její třídy. Vytvoříme nejdříve všechny podmnožiny $M_i \subset M (i \in \{1, \ldots, n\})$ takto: M_i obsahuje všechny takové prvky množiny M, které jsou tolerantní s prvkem x_i. Vzhledem k reflexivitě tolerance není množina M_i prázdná, obsahuje vždy aspoň jeden prvek, a to prvek x_i. Množina M_i buď je třída nebo z ní třída vznikne vynecháním určitého počtu prvků. Kdybychom k ní totiž jakýkoliv další prvek přidali, nebyl by v toleranci s prvkem x_i. Přitom množina M_i je třídou vždy, je-li nejvýš dvouprvková. Předpokládejme tedy, že M_i obsahuje aspoň tři prvky a není třídou. Z prvků množiny M_i vytvoříme nejdříve všechny dvouprvkové množiny, jejichž průnikem je množina $\{x_i\}$. Jsou to podtřídy tolerance. Tyto podtřídy pak doplňujeme zbývajícími prvky na třídy tolerance (podle [4], **V 2.11**), a to tak, že nejdříve vytvoříme všechny tříprvkové podtřídy, ty pak doplňujeme na čtyřprvkové atd. Tímto způsobem získáme všechny třídy tolerance. Přesvědčme se o tom. Nechť K je libovolná třída tolerance. Musí obsahovat aspoň jeden z prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nechť tedy $x_i \in K$. Všechny ostatní prvky třídy K

jsou s prvkem x_i tolerantní a platí tedy $K \subset M_i$. Buď $K = M_i$ nebo vznikne z M_i vynecháním určitého počtu prvků. Poněvadž jsme z M_i všechny třídy tolerance již získali, musí být K jednou z nich.

Dalším pojmem, který zavedeme, bude pojem báze prostoru tolerance.

Definice 1. Nechť je dán systém tříd tolerance T v množině M. Třída K daného systému se nazývá nadbytečná vzhledem k ostatním třídám, jestliže pro ni platí: Ke každé dvojici tolerantních prvků $x, y \in K$ existuje aspoň jedna další třída daného systému, která oba prvky x, y obsahuje.

Definice 2. Systém $\mathscr{B}$ tříd tolerance T v množine M se nazývá báze prostoru tolerance (M, T), jestliže platí:

1. Ke každé dvojici tolerantních prvků $x, y \in M$ existuje třída systému $\mathscr{B}$, která oba tyto prvky obsahuje.
2. Žádná třída systému $\mathscr{B}$ není nadbytečná vzhledem k ostatním.

Nechť je dán prostor tolerance (M, T), kde M je konečná množina. Ukážeme si způsob, jak lze dojít k bázi tohoto prostoru. Vybereme a očíslujeme všechny třídy tolerance $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Nyní prověříme, není-li třída K_1 nadbytečná vzhledem k třídám $K_2, K_3, \ldots, K_n$. Jestliže ano, vynecháme ji a prověřujeme dále třídu K_2 vzhledem k třídám $K_3, \ldots, K_n$. Jestliže třída K_1 není nadbytečná vzhledem k třídám $K_2, \ldots, K_n$, ponecháme ji a zjišťujeme, zda K_2 není nadbytečná vzhledem k třídám $K_1, K_3, \ldots, K_n$. Stejným způsobem prověříme všechny další třídy, až se zbavíme nadbytečných tříd a zůstane báze. Výsledek závisí na původním očíslování tříd. Přečíslujeme-li třídy, dojdeme obecně k jiné bázi.

Kromě pojmu báze zavedeme pojem jádro tolerance. Víme, že všechny třídy K_i dané tolerance v množině M tvoří pokrytí množiny M. Platí $\cup K_i = M$. Obecně třídy tohoto pokrytí nejsou disjunktní.

Definice 3. Nechť (M, T) je prostor tolerance. Množina $J \subset M$ se nazývá jádro prostoru tolerance, jestliže existuje systém $\mathscr{S}$ tříd $K_1, K_2, \ldots$ s touto vlastností: J je množina všech takových prvků z M, že každý z nich je obsažen ve všech třídách systému $\mathscr{S}$ a v žádných jiných. Takto definované jádro budeme označovat $J(K_1, K_2, \ldots)$ a řekneme, že je tvořeno systémem $\mathscr{S} = (K_1, K_2, \ldots)$.

Poznámka 1. Je-li tolerance T ekvivalencí, je každá její třída jádrem.

Poznámka 2. Lze též definovat jádra vzhledem k určité bázi $\mathscr{B}$ daného prostoru tolerance. V příslušné definici se uvažuje pouze o třídách, které náležejí dané bázi $\mathscr{B}$. Dá se dokázat, že množina jader vzhledem k bázi $\mathscr{B}$ je táž jako množina jader z definice 3.

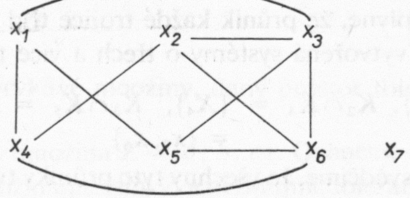
Vrátíme-li se k zobrazení $\mathscr{S}$: $M \rightarrow \mathscr{P}(H)$, které bylo zavedeno ve [4], a to v důkazu V 2,13., můžeme jádro definovat jako takovou podmnožinu množiny M, jejíž prvky mají v tomto zobrazení společný obraz. Znamená to, že pro libovolné dva prvky $x, y \in J$ platí, že podmnožina všech tříd, do nichž patří x, je táž, jako množina všech tříd, do nichž patří y.

Z definice je zřejmé, že jádro $J(K_1, K_2, \ldots)$ je částí průniku $K_1 \cap \cap K_2 \cap \ldots$. Zvláštní případ nastane, jestliže všechna jádra jsou jednoprvkové množiny.

Definice 4. Prostor tolerance se nazývá prostý, jestliže každé jádro obsahuje právě jeden prvek.

Uvedeme si nyní několik příkladů.

Príklad 1. Nechť je dána množina $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Tolerance T je dána uzlovým grafem.



Poznámka: V grafu tolerance by v každém uzlu měla být zakreslena smyčka (vzhledem k reflexivitě) a orientované hrany opatřeny šipkami v obou směrech (vzhledem k symetrii). Smyčky a šipky nejsou zakresleny, jak se to ostatně běžně provádí.

Ve shodě s uvedeným obecným postupem při určování všech tříd tolerance označme:

$M_1 = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$
$M_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
$M_3 = \{x_3, x_1, x_2, x_5, x_6\}$
$M_4 = \{x_4, x_1, x_2, x_6\}$
$M_5 = \{x_5, x_1, x_2, x_3, x_6\}$

$M_6 = \{x_6, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$M_7 = \{x_7\}$

Třídy tolerance:

$K_1 = \{x_7\}$
$K_2 = \{x_1, x_4\}$
$K_3 = \{x_1, x_3, x_5\}$
$K_4 = \{x_2, x_4, x_6\}$
$K_5 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$

Tyto třídy tvoří bázi. Žádná třída není nadbytečná.

Dále určíme jádra daného tolerančního prostoru.

K_1 je disjunktní se všemi ostatními třídami, tvoří tedy jádro. Ke každému prvku ve zbývajících třídách existuje vždy aspoň jedna další třída, která jej obsahuje.

Další jádra tedy už nejsou tvořena systémy o jedné třídě. $K_2 \cap K_5 = \emptyset$, $K_3 \cap K_4 = \emptyset$, jádro nemůže být tedy tvořeno žádným systémem obsahujícím třídy K_2, K_5 ani žádným systémem obsahujícím třídy K_3, K_4. Odtud též dále plyne, že průnik každé trojice tříd je prázdný, neexistují proto ani jádra vytvořená systémy o třech a více třídách

$$K_2 \cap K_3 = \{x_1\},\ K_2 \cap K_4 = \{X_4\},\ K_3 \cap K_5 = \{x_3, x_5\},\ K_4 \cap K_5 = \{x_2, x_6\}$$

Snadno se přesvědčíme, že všechny tyto průniky tvoří současně jádra.

Celkem:

$J(K_1) = \{x_7\}$
$J(K_2, K_3) = \{x_1\}$
$J(K_2, K_4) = \{x_4\}$
$J(K_3, K_5) = \{x_3, x_5\}$
$J(K_4, K_5) = \{x_2, x_6\}$

Příklad 2. Nechť $M = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a tolerance T v množině M je zadána takto: xTy znamená, že čísla $x, y \in M$ jsou soudělná. V tomto případě označíme $M_k (k \in M)$ množinu všech takových čísel — prvků z M, které jsou tolerantní s číslem k

$M_5 = \{5, 10\}$
$M_6 = \{6, 8, 9, 10\}$

$M_7 = \{7\}$
$M_8 = \{8, 6, 10\}$
$M_9 = \{9, 6\}$
$M_{10} = \{10, 5, 6, 8\}$

Třídy tolerance:

$K_1 = \{7\}$
$K_2 = \{5, 10\}$
$K_3 = \{6, 9\}$
$K_4 = \{6, 8, 10\}$

Tento systém všech tříd tvoří bázi.
Jádra tolerance:

$J(K_1) = \{7\}$
$J(K_2) = \{5\}$
$J(K_3) = \{9\}$
$J(K_4) = \{8\}$
$J(K_2, K_4) = \{10\}$
$J(K_3, K_4) = \{6\}$

Jádra jsou jednoprvkové množiny, daný prostor tolerance je prostý.

Příklad 3. Je dána množina $Z = \{a, b, c\}$. Označme M množinu všech neprázdných podmnožin množiny Z a definujme toleranci T v množine M takto: Pro $x, y \in M$ platí xTy, jestliže $x \cap y \neq \emptyset$. Tato tolerance má tři třídy:

$K_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
$K_2 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
$K_3 = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Žádná třída není nadbytečná, systém tříd K_1, K_2, K_3 tvoří bázi.
Jádra tolerance:

$J(K_1) = \{\{a\}\}$, $J(K_2) = \{\{b\}\}$, $J(K_3) = \{\{c\}\}$,
$J(K_1, K_2) = \{\{a, b\}\}$, $J(K_1, K_3) = \{\{a, c\}\}$, $J(K_2, K_3) = \{\{b, c\}\}$
$J(K_1, K_2, K_3) = \{\{a, b, c\}\}$

Daný prostor tolerance je prostý.

Příklad 4. M je množina variací třetí třídy z prvků 0, 1 s opakováním, tj.

$$M = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

a tolerance T je zadána takto: Dvě variace (a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3) jsou v toleranci, jestliže existuje aspoň jeden index $i (i \in \{1, 2, 3\})$ tak, že platí $a_i = a'_i$.

Při hledání všech tříd tolerance nebudeme užívat postupu, který byl uveden obecně. Bylo by to velmi zdlouhavé. Všimněme si nejdříve, že s každým prvkem (a_1, a_2, a_3) je v množině M obsažen právě jeden prvek $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ takový, že pro každé i $(i \in \{1, 2, 3\})$ platí: Je-li $a_i = 0$, pak $\overline{a_i} = 1$ a je-li $a_i = 1$, pak $\overline{a_i} = 0$. Takový prvek $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ nazveme prvek doplňkový k prvku (a_1, a_2, a_3). Je zřejmé, že relace „být doplňkovým prvkem" je relace symetrická. Můžeme proto hovořit o dvojicích navzájem doplňkových prvků. Žádné dva navzájem doplňkové prvky nejsou v toleranci T a každé dva prvky, které nejsou navzájem doplňkové, jsou v toleranci T. Tedy každý prvek množiny M je v toleranci se všemi ostatními prvky množiny M s výjimkou svého doplňkového prvku. Množinu M můžeme více způsoby rozložit na dvě disjunktní části A, B po čtyřech prvcích, a to tak, aby platilo, že žádná dvojice navzájem doplňkových prvků nepatří současně do téže části. Tak např.

$$A = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$
$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Tato úvaha nás už vede bezprostředně k tvrzení, že všechny třídy tolerance jsou čtyřprvkové množiny.

Kdybychom totiž k podtřídě o čtyřech prvcích přidali libovolný další prvek, byl by to prvek doplňkový k některému prvku dané podtřídy a tedy by s ním nebyl v toleranci. Třída tolerance nemůže mít tedy více prvků než čtyři. Na druhé straně každou podtřídu, která má méně prvků než čtyři, lze doplnit na čtyřprvkovou množinu, aniž by byla porušena tolerance. Při určování všech tříd tolerance vyjdeme z libovolných dvou tříd, např.

$$K_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$
$$K_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Dalších osm tříd získáme tak, že vždy jeden prvek jedné třídy nahradíme prvkem k němu doplňkovým z druhé třídy

$K_3 = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
$K_4 = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
$K_5 = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
$K_6 = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
$K_7 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$
$K_8 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
$K_9 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
$K_{10} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

Jestliže budeme nyní nahrazovat dvojice prvků ve třídách K_1, K_2 dvojicemi odpovídajících doplňkových prvků, povede to k dalším šesti třídám

$K_{11} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
$K_{12} = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$
$K_{13} = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
$K_{14} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$
$K_{15} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
$K_{16} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

Tím jsou všechny třídy dané tolerance T nalezeny.

Použijeme-li nyní metody uvedené pro určení báze prostoru tolerance při daném očíslováni tříd, zjistíme, že všechny třídy $K_1, \ldots, K_{10}$ jsou nadbytečné, třídy $K_{11}, \ldots, K_{16}$ tvoří bázi.

Při určování množiny všech jader daného prostoru tolerance vyjdeme z poznámky 2 a budeme určovat jádra vzhledem k nalezené bázi. Budeme je označovat $J_{\mathcal{B}}$.

$J_{\mathcal{B}}(K_{11}, K_{12}, K_{13}) = \{(1, 1, 1)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{11}, K_{12}, K_{14}) = \{(1, 0, 0)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{11}, K_{13}, K_{15}) = \{(0, 1, 0)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{11}, K_{14}, K_{15}) = \{(1, 1, 0)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{12}, K_{13}, K_{16}) = \{(0, 0, 1)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{12}, K_{14}, K_{16}) = \{(1, 0, 1)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{13}, K_{15}, K_{16}) = \{(0, 1, 1)\}$
$J_{\mathcal{B}}(K_{14}, K_{15}, K_{16}) = \{(0, 0, 0)\}$

Na závěr si všimneme jedné význačné vlastnosti, která platí pro jádra každého prostoru tolerance.

Věta: Nechť je dán prostor tolerance (M, T) a relace Ω, která je definovaná takto: $x \Omega y$ znamená, že prvky x, y patří témuž jádru daného prostoru tolerance. Pak relace Ω je ekvivalence.

Důkaz: Označme M_x množinu všech takových prvků množiny M, které jsou v toleranci T s prvkem x. Dokážeme, že platí $x \Omega y$, právě když $M_x = M_y$.

Nechť platí $x \Omega y$, což znamená, že existuje takový systém tříd $K_1, K_2, \ldots$, že x, y patří všem třídám tohoto systému a žádným jiným. Poněvadž platí, že dva prvky jsou tolerantní, právě když patří téže třídě, je $M_x = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ i $M_y = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$. Tedy $M_x = M_y$.

Nechť obráceně $M_x = M_y$. Nechť $x \in K$, kde K je třída tolerance. Pro libovolné $z \in K$ platí xTz, což znamená že $z \in M$. Podle předpokladu platí též $z \in M$, neboli yTz. Odtud $y \in K$. Stejným způsobem se dokáže, že každá třída, která obsahuje y, obsahuje současně i x. Znamená to tedy, že x a y patří témuž systému tříd, neboli $x \Omega y$.

Z předcházejícího už bezprostředně plyne, že relace Ω je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Důsledek: Každá dvě různá jádra daného prostoru tolerance jsou disjunktní (viz [4], **V 2.14**).

Jestliže se definuje rozklad $\mathcal{R}$ množiny M jako takové pokrytí množiny M, pro něž platí:

1. $\emptyset \notin \mathcal{R}$.

2. $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{R}} A = M$.

3. Je-li $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, $A_1 \neq A_2$, pak $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, je zřejmé, že jádra prostoru tolerance tvoří třídy rozkladu množiny M. Tedy každé toleranci lze přiřadit jistý rozklad množiny M, jehož třídami jsou jádra daného prostoru tolerance.

Literatura

[1] Šrejder, Ju. A.: Ravenstvo schodstvo, porjadok. Moskva 1971.

[2] Šrejder, Ju. A.: Prostranstva tolerantnosti. Kibernetika 1970; 2.

[3] Jakubovič, S. M.: Aksiomatičeskaja teoria schodstva. Naučno-techničeskaja informacija 1968; 10.
[4] Plačková, J.: Relace tolerance. In: Matematické obzory 12. Bratislava ALFA 1978, s. 1—11.