MODERNIZÁCIA A ANALÝZA

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

V tomto článku uvedieme niektoré zásady, podľa ktorých bola napísaná učebnica pre gymnáziá Matematika 7, venovaná základom infinitezimálneho počtu. (To, že bola napísaná podľa týchto zásad, neznamená, že sa ich podarilo vždy a v plnej miere uplatniť. Dôležitejšie je, aby sa uplatnili v samotnom vyučovaní.)

Píšeme analýza, ale máme na mysli diferenciálny a integrálny počet. Diferenciálny a integrálny počet sú už tradičnou doménou vysokoškolskej matematiky. Hovorievalo sa im aj vyššia matematika. A aj keď sa obsah vyučovania matematiky na vysokých školách neustále mení, matematická analýza zostáva stále jeho osou.

Na našich stredných školách všeobecnovzdelávacích sa základy diferenciálneho a integrálneho počtu vyučovali striedavo: v niektorých rokoch áno, v niektorých nie. Posledne okolo r. 1970 trvala u nás chvíľu vážna diskusia o tom, či ich na našich gymnáziách vyučovať, alebo nie. Nakoniec zavážila tá skutočnosť, že v zahraničí sa diferenciálny a integrálny počet zavádza do stredoškolskej výuky v čoraz väčšej miere, a to i v tých krajinách, kde tomu tak nebolo. A keďže sa základy infinitezimálneho počtu v tom čase u nás vyučovali, ponechali sa v učebných osnovách aj naďalej.

Zostal tu problém prípadnej reštrinkcie látky a začlenenia do novej koncepcie vyučovania matematiky, v ktorej výraznejšiu úlohu nadobudli množiny. V súčasnej matematike totiž úloha diferenciálneho a integrálneho počtu neklesla, skôr naopak. A to je jedna stránka veci.

Druhou stránkou je príprava žiakov na vysokoškolské štúdium. Na väčšine vysokých škôl sa diferenciálny a integrálny počet vyučuje v zhustenej forme. Za veľmi krátky čas sa študenti stretnú s enormným množstvom látky. Preto je vítané, ak sa žiaci s problematikou diferenciálneho a integrálneho počtu zoznámia už skôr, na strednej škole. Môže im to uľahčiť štúdium matematiky na škole vysokej.

V doterajšom vývine matematiky sa všeobecne uznávajú dva najvýznamnejšie medzníky. Prvý je vznik diferenciálneho a integrálneho počtu, druhým je vytvorenie teórie množín.

V čom že bol infinitezimálny počet taký významný, v čom tak výrazne ovplyvnil ďalší vývin matematiky? Zdá sa, že dôvod treba hľadať mimo matematiky. Diferenciálny a integrálny počet vytvorili aparát pre ďalší stupeň matematického popisu reálnej skutočnosti. Predovšetkým umožnili pomerne dokonalým spôsobom popísať (mechanický) pohyb, čo dovtedajšími prostriedkami nebolo možné. Pravdaže, tým, že sa objavili také významné aplikácie (a v tomto prípade dokonca ťažko hovoriť čo bolo skôr, ucelená teória, či aplikácie), začal diferenciálny a integrálny počet pútať trvale záujem matematikov. Sám pritom prechádzal zložitým vývojom, ale tá prvotná črta, totiž spätosť s aplikáciami, tá zostala dodnes. A preto by sme ju mali zdôrazniť aj pri vyučovaní. Nejde o teoreticky fundované úvahy, ale o to, aby ťažisko výuky bolo v riešení praktických úloh.

Táto zásada má ešte jeden aspekt, súvisiaci s celkovou terajšou tendenciou vo vyučovaní matematiky na gymnáziách, kde sa zdôrazňuje najmä pojem množiny a pojem zobrazenia a kde sa veľká pozornosť venuje reálnym funkciám. Diferenciálny a integrálny počet totiž poskytuje účinné prostriedky k štúdiu grafov takýchto funkcií. Ale aj naopak, vyšetrovanie vlastností reálnych funkcií patrí medzi najjednoduchšie, ale aj najkrajšie aplikácie infinitezimálneho počtu.

Nemožno tvrdiť, že by diferenciálny a integrálny počet boli neobľúbené. Príčinou ich relatívnej obľuby sú pomerne jednoduché, formalizované početné pravidlá. Žiak sa ľahko naučí narábať s týmito pravidlami a aspoň na chvíľu nadobudne akú-takú istotu. (Aj keď sa niekedy stane, že počíta i vypočíta, ale sám nevie čo.) V určitom rozpore s touto eleganciou a ľahkosťou sú v matematickej analýze časté zložité dôkazy, používajúce jemný až vyumelkovaný aparát. Ďalším problémom je samotný pojem limity, ktorý je pre matematickú analýzu taký závažný, že ho na žiadnom stupni nemožno obísť. Máme teda dva metodické problémy, problém dôkazov a problém pojmov.

Problém dôkazov možno riešiť i tak, že háklivejšie dôkazy vynecháme.

Vo vyučovaní vôbec a vo vyučovaní matematiky zvlášť ide o to, aby žiaci pochopili základné zákonitosti študovaného odboru a aby boli schopní tvorivo a samostatne pristupovať k problémom. Exaktný, formalizovaný matematický dôkaz nie je jedinou cestou, ktorou možno túto zákonitosť komunikovať. Často povie viac príklad, obrázok, alebo dôkaz veľmi špeciálneho prípadu. Fakty a súvislosti treba vo vyučovaní vždy odôvodniť, formálny dôkaz sa však vždy podávať nemusí.

Trochu iná situácia je vo sfére pojmov. Čo ako je aj tu dôležité intuitívne štádium, nemožno pri ňom zostať. Precizovanie pojmov je vynútené tak samotnou podstatou súčasnej matematiky (a nielen matematiky — zdá sa, že to je jedna z čŕt súčasnej vedy vôbec), ako aj potrebami aplikácií. Pozrime sa teraz bližšie na pojem, ktorý je kľúčom k celej matematickej analýze, na pojem limity.

Limita bez epsilonov

Všeobecne sa usudzuje, dôkaz toho neexistuje, že pojem limity pochopí nanajvýš 20 % žiakov. To bola jedna z príčin, pre ktoré sme sa odhodlali experimentovať. Nemali sme veľmi čo pokaziť.

Na druhej strane zmyslom modernizácie by malo byť zjednodušenie vyučovania, výklad na základe novších faktov môže byť jednoduchší a zrozumiteľnejší. Ešte inak možno povedať: množina všetkých možných výkladov daného pojmu je v bohatšej matematike bohatšia, preto v nej možno nájsť aspoň toľko prijateľných ciest, ako predtým. A možno aj nejakú lepšiu.

Pritom sme nezmenili veľa. Zdôrazňujeme pojem okolia bodu, veci formulujeme pomocou okolí a nie pomocou ich polomerov (epsilonov; samozrejme, pracovať s epsilonmi sa nezakazuje). Napríklad definícia:

Funkcia f má v bode a limitu L, ak k ľubovoľnému okoliu U bodu L existuje také okolie V bodu a, že pre všetky $x \in V$, $x \neq a$, je $f(x) \in L$.

V priebehu overovania učebnice sa vyskytol názor, že epsilonová technika je dôležitá pre počítanie príkladov. To je pravda len vtedy, ak máme na mysli príklady typu: K ľubovoľnému kladnému epsilon nájdite také delta, že...

Inak sa príklady počítajú pomocou viet o limitách. V učebnici M 7 sledujeme za tým účelom iný princíp — spojitosť operácií súčtu, súčinu a podielu. Čo znamená napr. tvrdenie, že operácia + je spojitá? Znamená to toto (dôkaz temer triviálny): K ľubovoľnému okoliu U bodu $L+M$ existuje také okolie V_1 bodu L a také okolie V_2 bodu M, že pre všetky $y \in V_1$ a všetky $z \in V_2$ je $y+z \in U$. (Intuitívne: súčet sa zmení nepatrne, ak veľmi nezmeníme jednotlivé sčítance.) Podobný princíp platí pre súčin i podiel, len dôkazy sú ťažšie. (Sú určené spomínaným dvadsiatim percentám žiakov a uplatnia sa v nich aj epsilony.)

Pravdaže, samotné dôkazy viet o limitách (súčtu, súčinu a podielu) sú potom veľmi ľahké.

Predbežné skúšky nedopadli najhoršie. V jednom prípade si žiaci dokonca sami vybrali túto koncepciu argumentujúc tým, že je ľahšia na pochopenie. V každom prípade sme pre istotu nevenovali limitám príliš veľa miesta. V šetrení miestom nám pomohla trochu aj nová koncepcia. A všeobecne je známe, že ušetriť čas na precvičovanie je najväčšia pomoc učiteľovi.

Derivácia a priebeh funkcie

Techniku počítania derivácií sme obmedzili na minimum. V podstate na štyri základné operácie. Čo sa týka elementárnych funkcií, popri racionálnej funkcii dostali milosť len goniometrické funkcie. Aj deriváciu zloženej funkcie sme náročky odsunuli až na koniec, za aplikácie, ak zvýši čas. Jadrom vyučovania diferenciálneho počtu by malo byť vyšetrovanie priebehu funkcií. (V našej učebnici je to monotónnosť a lokálne extrémy.)

Východiskom k aplikáciám, princípom, ktoré nedokazujeme (len vysvetlíme na obrázku), je Lagrangeova veta o strednej hodnote. Aby sme sa vyhli komplikovanejším pojmom (jednostranným limitám), pracujeme s touto slabšou verziou:

Nech funkcia f má deriváciu v každom bode intervalu (a, b), x_1, $x_2 \in (a, b)$. Potom existuje také $c \in (x_1, x_2)$, že

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

Uvedená formulácia nás zbavuje povinnosti zaoberať sa funkciami spojitými na uzavretom intervale a je východiskom k praktickým aplikáciám. Načo sa zaoberať niektorými krokmi dôkazu Langrangovej vety, keď jej dôkaz na strednej škole aj tak neprichádza do úvahy? Prispeje azda objasňovanie niektorých špeciálnych pojmov (ktoré sa v ďalšom nepoužijú) viac k rozvoju matematického myslenia žiakov, ako samostatné riešenie príkladov o funkciách pomocou diferenciálneho počtu?

Určitý integrál a plošný obsah

V učebnici je základnou motiváciou pre pojem určitého integrálu plošný obsah. V porovnaní s komentármi sme vynechali pojem Jordanovej miery. Jednak preto, že nebol príliš populárny, jednak preto, že sa nám zdala byť prepychom Jordanova konštrukcia v takej tesnej blízkosti určitého integrálu, pomocou ktorého sa problém obsahu rieši elegantne a jednoducho.

Samotný integrál (z funkcie spojitej v intervale $\langle a, b\rangle$) definujeme pomocou primitívnej funkcie (tzv. Newtonovej—Leibnitzovej formuly)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

keď sme predtým čitateľa na príklade presvedčili o tom, že rozdiel $F(b) - F(a)$ vystihuje intuitívny pojem plošného obsahu.

S Newtonovou definíciou sa ľahko pracuje, žiaci si môžu čo-to dokázať. Aplikácie sú však založené na nasledujúcom tvrdení, ktoré nedokazujeme, ale motivujeme približným výpočtom určitého integrálu:

Existuje práve jedno také číslo I, že

$$s(f, D) \leqq I \leqq S(f, D)$$

pre všetky delenia D daného intervalu. Pritom $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Napríklad v prípade rotačného telesa A (vytvoreného grafom funkcie f) sa v učebnici elementárnymi prostriedkami dokáže, že

$$s(\pi f^2, D) \leqq V(A) \leqq S(\pi f^2, D)$$

Preto sa $V(A)$ rovná integrálu, pravda, z funkcie πf^2, teda

$$V(A) = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Uvedená metóda by sa dala použiť aj na ďalšie aplikácie. Zostali sme iba pri obsahu a objeme, pretože menej je niekedy viac. Totiž, menej pojmov, tvrdení, ale dôkladnejšie prebratých.

Napokon niekoľko slov o formálnej stránke. V učebnici sme sa nevyhýbali schéme veta—dôkaz. Nech žiaci vidia, čo to matematický dôkaz je. Spomínaná schéma je obvyklou formou prezentácie výsledkov v matematike. Pravdaže, matematické myslenie je oveľa bohatšie ; okrem deduktívnych, obsahuje aj induktívne postupy, intuitívne a heuristické úvahy. Vyjadriť túto bohatosť vo vyučovaní je veľmi ťažké — hlavná váha tu zostáva na vyučujúcom. Ťažkosti sa neodstránia automaticky odstránením systému veta—dôkaz. A naopak, použitie tohto systému by nemalo znamenať, že to má byť jediná metóda, ktorou sa žiakom prihovárame. Ostatne, snáď samotný učebný text bude v tomto smere dostatočne inšpirujúcim.