ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Bohuslav Sivák, Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Mlynská dolina, 816 31 Bratislava

Nové úlohy (s riešeniami) posielajte na jeho adresu.

Úloha *A17* (prevzaté z časopisu Kvant)

Aký najväčší počet a) veží, b) dám možno postaviť na šachovnicu 8×8 tak, aby každá z týchto figúr bola napadnutá najviac jednou zo zvyšných figúr?

Riešenie: Vezmime všeobecne šachovnicu $n \times n$, ukážeme, že na ňu nemožno postaviť viac než $4n/3$ veží pri splnení danej podmienky. Nech k veží je postavených na šachovnicu $n \times n$ vyžadovaným spôsobom. Na každé pole, kde stojí veža, napíšeme číslo 0. V každom z n stĺpcov šachovnice vykonajme túto operáciu: ak v stĺpci stoja dve čísla, zväčšíme každé z nich o 1, ak jedno číslo, zväčšíme ho o 2, a ak stĺpec neobsahuje žiadne číslo, necháme ho bez zmeny. Analogickú operáciu vykonáme so všetkými n riadkami. Je jasné, že na mieste každej veže je napísané číslo, ktoré sa rovná 3 alebo 4. Označme S tento súčet, potom $S \geqq 3k$, a keďže v každom riadku a stĺpci sme pridali nanajvýš 2, $S \leqq 4n$. Máme teda $3k \leqq S \leqq 4n$, odkiaľ $k \leqq 4n/3$.

Pre $n = 8$ dostaneme odhad $k \leqq 10$, príklad rozostavenia 10 veží: $a1, b1, c2, c3, d4, e4, f5, f6, g7, h8$. Nie je ťažké dokázať, že na šachovnicu $n \times n$ možno postaviť $4n/3$ veží pri splnení podmienok úlohy (návod: do štvorca 3×3 vojdú 4 veže).

Prejdime k úlohe b). Je jasné, že nemožno postaviť viac dám ako veží, takže treba zistiť, či možno postaviť 10 dám. Odpoveď je pozitívna, dámy možno rozostaviť napr. takto: $a8, b8, c3, c4, d7, e7, f2, g1, h5, h6$

Úloha *A18* (prevzaté z časopisu Kvant)

Čísla 1, 2, ..., n možno napísať v takom poradí, že pre žiadne dve čísla ich aritmetický priemer sa nerovná žiadnemu z čísel napísaných medzi nimi?

Riešenie: Ukážme, že to je možné. Usporiadanie spĺňajúce uvedenú podmienku nazveme pre stručnosť prípustným.

Ak sa celé číslo b rovná aritmetickému priemeru čísel a, c, tak $a + c$ je párne číslo, teda a, c sú alebo obe párne, alebo obe nepárne. To znamená, že ak napíšeme čísla 1, 2, ..., n v takom poradí, že každé párne číslo je pred každým nepárnym, tak k porušeniu prípustnosti môže dôjsť len tak, že aritmetický priemer dvoch párnych (nepárnych) čísel sa rovná párnemu (nepárnemu) číslu stojacemu medzi nimi. Stačí teda dokázať, že možno prípustne usporiadať tak párne, ako aj nepárne čísla. Lenže $2b = (2a + 2c)/2$ či $2b - 1 = (2a - 1 + 2c - 1)/2$ práve vtedy, ak $b = (a + c)/2$, takže úloha sa zredukovala na prípustné usporiadanie čísel 1, 2, ..., k, kde $k < n$. To dáva dostatočný základ pre dôkaz indukciou.

Vykonaná úvaha dáva efektívnu konštrukciu prípustných usporiadaní, napr. pre $n = 14$:

2, 1

4, 2, 3, 1

4, 6, 2, 7, 3, 5, 1 (tu sa vynechá 8 na začiatku)

8, 12, 4, 14, 6, 10, 2, 7, 11, 3, 13, 5, 9, 1

Úloha *A19* (prevzaté z časopisu Kvant)

Na kongrese sa zišli matematici, z nich niektorí sú priatelia. Zistilo sa, že žiadni dvaja matematici, ktorí majú na kongrese rovnaký počet priateľov, nemajú spoločných priateľov. Dokážte, že niektorý matematik má na kongrese práve jedného priateľa.

Riešenie: Vezmime matematika A, ktorý má na kongrese najväčší počet priateľov, ak ich je viac, vyberieme jedného z nich. Tento počet označme k. Pripusťme, že žiadny z k priateľov matematika A nemá na kongrese práve jedného priateľa. Potom ich počty priateľov môžu byť len 2, 3, ..., k, čo je $k - 1$ možností. Podľa Dirichletovho princípu majú dvaja z nich rovnaký počet priateľov, čo je spor, lebo majú spoločného priateľa, a to A. Tým je dokázané, že A je jediným priateľom niektorého zo svojich priateľov.