O POSTUPNOSTIACH PRIRODZENÝCH ČÍSEL S OHRANIČENÝM POČTOM A SÚČTOM PRVOČÍSELNÝCH DELITEĽOV

PETER BERO, Bratislava

V článku [1] hľadá P. Kostyrko najdlhšiu postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých počet rôznych prvočíselných deliteľov nepresahuje dané prirodzené číslo. V článku [2] hľadá najdlhšiu postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých súčet rôznych prvočíselných deliteľov je menší, alebo rovnaký ako dané prirodzené číslo. V tomto článku ukážeme, že analogické tvrdenia možno dokázať aj v tom prípade, ak neuvažujeme rôzne prvočíselné delitele, ale všetky prvočíselné delitele prirodzeného čísla.

Veta 1. Nech n je prirodzené číslo. $Q(n)$ je počet členov najdlhšej postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré majú počet prvočíselných deliteľov menší ako n alebo rovnajúci sa n. Potom $Q(n)=2^{n+1}-1$ a jedinou $Q(n)$-člennou postupnosťou s danou vlastnosťou je postupnosť $\{1, 2, \ldots, Q(n)\}$.

Dôkaz. Uvažujme o postupnosti $\{2^{n+1}+k2^n\}_{k=0}^{\infty}=\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Každý jej člen môžeme písať v tvare $a_k=2^N(2+k)$, $k=0, 1, \ldots$ Z tohoto zápisu vidieť, že každé a_k, pre $k=0,1, \ldots$ má aspoň $n+1$ prvočíselných deliteľov. Medzi ľubovoľnými dvoma členmi postupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ sa nachádza

$$[2^{n+1}+(k+1)2^n]-(2^{n+1}+k2^n)=2^n$$

prirodzených čísel. Keďže najmenší člen postupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ je $a_0=2^{n+1}$ a $2^n<$ $<2^{n+1}-1$, dostávame pre $Q(n)$ horné ohraničenie $Q(n)\leqq 2^{n+1}-1$.

Ďalej ukážeme, že prvky postupnosti $\{1, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ majú počet prvočíselných deliteľov menší alebo rovnajúci sa n. Z toho vyplynie aj rovnosť $Q(n)=$ $2^{n+1}-1$. Nech teda $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ kde pre $i=1, 2, \ldots, r$ sú p_i ľubovoľné prvočísla a $\alpha_i\geqq 1$ celé čísla, je ľubovoľné prirodzené číslo mąjúce aspoň $n+1$ prvočíselných deliteľov. Teda $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r\geqq n+1$. Potom zrejme $2^{n+1}\leqq 2^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r}\leqq$ $\leqq p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$. Z toho vyplýva, že 2^{n+1} je najmenšie číslo majúce $n+1$ prvočíselných deliteľov, a teda všetky čísla postupnosti $\{1, 2, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ majú počet prvočíselných deliteľov menší alebo rovnajúci sa n. Skutočnosť, že postupnosť $\{1, 2, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ je jedinou postupnosťou s danou vlastnosťou, vyplýva z faktu, že každý člen postupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ má aspoň $n+1$ prvočíselných deliteľov.

V ďalšom budeme symbolom $\pi(n)$ označovať počet všetkých prvočísel menších alebo rovnajúcich sa číslu n a symbolom $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ rastúcu postupnosť všetkých prvočísel.

Veta 2. Nech $n\geqq 4$ je prirodzené číslo a $P'(n)$ je počet členov najdlhšej postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré majú súčet prvočíselných deliteľov menší alebo rovnajúci sa n. Potom $P'(n) = p_{\pi(n)+1} - 1$. Jedinou $P'(n)$-člennou postupnosťou s danou vlastnosťou je postupnosť $\{1, 2, \ldots, P'(n)\}$.

Dôkaz. Ak v dôkaze vety z článku [2] nahradíme slová „rôzne prvočíselné delitele" slovami „prvočíselné delitele" a $S(a)$ znakom $S'(a)$, znamenajúcim súčet všetkých prvočíselných deliteľov prirodzeného čísla a (t. j. ak $a = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_r^{\alpha_r}$ je kánonický rozklad a, tak $S'(a) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i$), tak spomínaný dôkaz môžeme opísať až na tvrdenie (C). V dôkaze tohto tvrdenia však stačí tvrdenie (B) aplikovať na $S'(a)$ vyjadrené v tvare $S'(a) = \underbrace{q_1 + \ldots + q_1}_{\alpha_1} + \ldots + \underbrace{q_r + \ldots + q_r}_{\alpha_r}$. Takto dostaneme požadovanú nerovnosť z $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i - 4 \leqq q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_r^{\alpha_r}$, za predpokladu $a > 4$. O pravdivosti tvrdenia vety 2 pre $n = 4$ sa možno jednoducho presvedčiť výpočtom.

Literatúra

[1] Kostyrko, P.: O postupnostiach prirodzených čísel s ohraničeným počtom prvočíselných deliteľov. Časopis pro pěstování matematiky, *97* (1972) 332—333.

[2] Kostyrko, P.: O postupnostiach prirodzených čísel s ohraničeným súčtom prvočíselných deliteľov. In: Matematické obzory 3, Bratislava 1973, s. 57.