MATEMATICKÉ OBZORY 18/1982

ČO SO ŠTVORČEKOVANÝM PAPIEROM[1]

MARTA MLYNARČÍKOVÁ
Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

Stačí kúsok štvorčekovaného papiera, farebné ceruzky a trochu chuti spestriť program bežného vyučovania matematiky alebo záujmového krúžku pre rôzne vekové skupiny detí (i pre krúžky so značným vekovým rozptylom detí). Zo školskej matematiky nie je totiž potrebné na riešenie nasledujúcich úloh takmer nič. Začať možno teda už s 8—10-ročnými deťmi, ale ani pre mnohých maturantov to nie sú triviálne úlohy.

Ide o celý rad úloh uverejnených v Matematike a fyzike ve škole 6/1978 (Miloš Jelínek: Počet čtverců ve čtvercové síti) a 7/1978 (Miloš Jelínek: Počet obdélníků ve čtvercové síti). Podľa týchto materiálov bol zostavený a realizovaný 5-týždňový program pre matematický krúžok, ktorý navštevovali žiaci 7. C triedy XV. ZDŠ v Košiciach.

Cieľom bolo ukázať deťom na jednoduchých kombinatorických úlohach, ako sa majú riešiť úlohy istého druhu a ako treba úlohu zovšeobecniť, t. j. priviesť ich k induktívnemu spôsobu hľadania a potom túto induktívnu metódu prehlbovať. K potrebným výsledkom dochádzali žiaci experimentálnou prácou a potom výsledky experimentovania zovšeobecňovali.

[1] Článok bol odmenený 3. cenou v súťaži o najlepší príspevok do Matematických obzorov so zameraním na ZDŠ, ktorú vypísal ÚV JSMF na rok 1980. Autorka je študentkou na Prírodovedeckej fakulte UJPŠ v Košiciach, odbor matematika-fyzika. Článok vznikol z práce napísanej v rámci ŠVOČ, za ktorú autorka získala v celoštátnom kole takisto tretiu cenu.

Plán tematického celku bol nasledovný:

1. týždeň: Zavedenie základných pojmov — štvorcová sieť, rozmery štvorcovej siete, rôzne štvorce v štvorcovej sieti. Induktívne určovanie počtu všetkých rôznych štvorcov v štvorcovej sieti.

2. týždeň: Odvodenie vzťahu na výpočet počtu všetkých rôznych štvorcov v štvorcovej sieti daných rozmerov.

3. týždeň: Prehĺbenie induktívnej metódy pri určovaní počtu všetkých rôznych obdĺžnikov v štvorcovej sieti.

4. týždeň: Odvodenie vzťahu na výpočet počtu všetkých rôznych obdĺžnikov v štvorcovej sieti daných rozmerov. Kombinačná hra Pentomíno.

5. týždeň: Opakovanie. Záverečný test.

Podrobnejšie teraz opíšem priebeh krúžku v prvých dvoch týždňoch.

1. týždeň

Načrtla som na tabuľu štvorcovú sieť rozmerov 8×8, t. j. štvorec obsahujúci 64 jednotkových štvorcov, a vyzvala deti, aby povedali, čo im to pripomína. Odpovede boli rôzne: krížovku, obkladačky, dláždenú cestu, šachovnicu, sito, sieť na motýle, sieť na ryby... Pri odpovediach týkajúcich sa sietí som žiakov prerušila a dohodli sme sa, že obrazec načrtnutý na tabuli budeme nazývať „štvorcová sieť". (Pojem „rozmery štvorcovej siete" sa ďalej používa v tomto význame.)

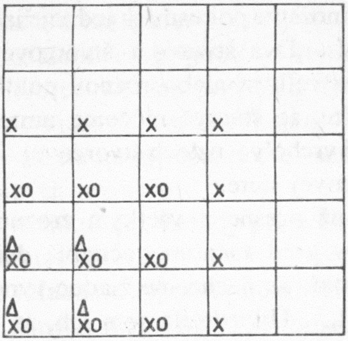
Potom som zadala hlavnú úlohu: Koľko rôznych štvorcov je v štvorcovej sieti rozmerov 8×8? Deti pohotovo odpovedali: 64, 65, 64, 64, 65... Keď som ich však upozornila, že štvorcov tam bude oveľa viac a načrtla niekoľko rôznych štvorcov do štvorcovej siete, ozvali sa hlasy aj s takýmito odpoveďami: 100, 1000, 200, veľa, nekonečne veľa.

Potom som deťom naznačila, že úlohu ešte nemožno riešiť, lebo sme sa nedohodli, ktoré štvorce v štvorcovej sieti budeme považovať za rôzne. Deti načrtávali do štvorcovej siete dva štvorce, ktoré sú podľa nich rôzne. Skoro všetky načrtli neprekrývajúce sa štvorce rôznej veľkosti, niektoré neprekrývajúce sa štvorce rovnakej veľkosti a iba jeden chlapec nakreslil prekrývajúce sa štvorce. Dohodli sme sa, že aj prekrývajúce sa štvorce, resp. štvorec ležiaci vnútri iného štvorca, budeme považovať za rôzne. Ďalej som chcela, aby deti slovne vyjadrili predchádzajúcu dohodu. Formulácie ich myšlienok boli spočiatku neúplné, nepresné, neuhladené, ale po dostatočnom množstve pokusov sa jednej žiačke podarilo sformulovať správnu odpoveď: „Dva štvorce v štvorcovej sieti považujeme za rôzne, ak majú rôznu veľkosť alebo rôznou polohu v štvorcovej sieti.“ Poznamenala som ešte, že štvorce môžeme umiestňovať do štvorcovej siete iba tak, aby mali vrcholy v uzloch štvorcovej siete a strany rovnobežné so stranami štvorcovej siete.

Úloha bola teraz už presne a všetkým zrozumiteľne sformulovaná. Poradila som im, aby pred začatím počítania dobre uvážili, ako bude najlepšie štvorce počítať, ak nechceme žiaden vynechať. Deti navrhovali maľovať, strihať, lepiť,... Upozornila som ich, že mi nejde o to, ako si budeme štvorce označovať, ale o postup, ako ich budeme spočítavať. Po krátkom samostatnom premýšľaní a experimentovaní malo súčasne niekoľko detí vhodný návrh, že štvorce si môžeme podeliť do skupín a že najvhodnejšie ich bude roztriediť podľa veľkosti. Sčítame teda najprv štvorce veľkosti 1×1, potom 2×2, $3\times 3,\ldots$, 8×8 a sčítaním týchto čiastočných výsledkov dostaneme riešenie danej úlohy.

Aby si žiaci osvojili navrhnutý postup, zjednodušila som úlohu na štvorcovú sieť rozmerov 3×3. Túto úlohu skoro všetky deti rýchlo a správne vyriešili. Potom sme úlohu riešili pre štvorcovú sieť rozmerov 5×5. Žiaci boli pri riešení veľmi aktívni, pri počítaní si pomáhali maľovaním štvorcov alebo prikladaním štvorcov vystrihnutých z tvrdého papiera do štvorcovej siete. Práca niektorých detí bola spočiatku chaotická, mnohé pozabudli, že štvorce sa môžu aj prekrývať a ukladali štvorce z tvrdého papiera do štvorcovej siete ako dlaždice. Ostatné deti úlohu úplne samostatne, systematicky a správne vyriešili. Niektoré logicky správne riešenia boli v dôsledku nepozornosti a nevhodne volenej symboliky numericky chybné, preto som žiakom navrhla, aby skúsili každý počítaný štvorec označiť v jeho ľavom dolnom roku. Potom sa na tabuli objavilo nasledovné riešenie úlohy: Postupne budeme sčítavať štvorce veľkosti 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5. Začíname vždy počítať v ľavom hornom rohu štvorcovej siete a posúvame štvorec zvolenej veľkosti postupne o jednotkový štvorec po riadku a potom po stĺpci. Postup i výsledok riešenia názorne vidno na *obr. 1* a v *tab. 2.*

Na záver sme sa vrátili k pôvodnej úlohe, t. j. určiť počet všetkých rôznych štvorcov v štvorcovej sieti rozmerov 8×8. Teraz už deti pri riešení postupovali systematicky, väčšina z nich používala navrhnutú



Obr. 1

Tabuľka 1

Veľkosti štvorcov		Počet štvorcov
1×1		25
2×2	$\times$	16
3×3	$\bigcirc$	9
4×4	$\triangle$	4
5×5		1
Spolu		55

Tabuľka 2

Rozmery štvorcovej siete	Celkový počet štvorcov	$1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5 + \dots$
1×1	1	
2×2	5	
3×3	14	
4×4	30	
5×5	55	
$\vdots$	$\vdots$	

symboliku a nastalo výrazne zlepšenie v tom, že počítali i prekrývajúce sa štvorce. Po ukončení výpočtu boli presvedčené, že výsledok je správny a že takto sme nemohli vynechať žiaden štvorec. Výsledný počet všetkých rôznych štvorcov — 204 — ich trochu prekvapil, lebo sa podstatne líšil od väčšiny ich odhadov.

2. týždeň

Na precvičenie pred týždňom osvojenej metódy sme určili počet všetkých rôznych štvorcov v štvorcovej sieti rozmerov 6×6 a 9×9, čo trvalo dosť dlho, ale deti to bavilo a súťažili medzi sebou, kto bude prvý.

Spýtala som sa detí, či by vedeli sčítať všetky rôzne štvorce v štvorcovej sieti ľubovoľných rozmerov. Odpoveď bola samozrejme kladná, preto som im kázala spočítať všetky rôzne štvorce v štvorcovej sieti rozmerov 25×25. Teraz sa deti zháčili, že postup riešenia síce vedia, ale trvalo by im to veľmi dlho. Boli teda ochotné hľadať rýchlejšie riešenie, t. j. nájsť vzťah medzi rozmermi štvorcovej siete a celkovým počtom všetkých rôznych štvorcov v tejto sieti. Na základe predtým získaných výsledkov a skupinovým riešením úlohy pre chýbajúce rozmery štvorcovej siete sme vyplnili prvé dva stĺpce nasledujúcej tabuľky (*tab. 2*). Zistiť, o akú závislosť ide, t. j. vyplniť tretí stĺpec tabuľky, sa deťom spočiatku nedarilo, ale pomocnými otázkami som ich doviedla k správnemu záveru, že v štvorcovej sieti rozmerov n × n je $Sn = 1 . 1 + 2 . 2 + 3 . 3 + \ldots + n . n$ rôznych štvorcov. Odvodený vzťah sa dá dokázať matematickou indukciou. Na krúžku sme dôkaz pravdaže nerobili.

O správnosti vzťahu sa deti presvedčili iba výpočtom počtu všetkých rôznych štvorcov v štvorcových sieťach, pre ktoré sme poznali správne výsledky určené predtým opísaným postupom. Deti si uvedomili, ako sme si odvodením vzťahu uľahčili a urýchlili riešenie daných úloh, a teraz už naozaj vedeli bezpečne a rýchlo určiť počet všetkých rôznych štvorcov v štvorcovej sieti ľubovoľných rozmerov. Výpočet podľa zisteného vzťahu si žiaci precvičili na tejto úlohe: Odhadnite počet všetkých rôznych štvorcov v štvorcovej sieti rozmerov 11×11 a 15×15. O správnosti odhadu sa presvedčte výpočtom. Odhady detí boli podstatne presnejšie ako na prvej hodine a výpočet nerobil nikomu väčšie ťažkosti. Niektoré nesprávne výsledky neboli zapríčinené logickými chybami, ale iba omylmi pri násobení a sčítaní.

Na základe skúsenosti z ďalšieho priebehu krúžku som došla k záveru, že na tomto mieste by bolo vhodnejšie tematicky celok ukončiť a vrátiť sa k nemu v nasledujúcom školskom roku alebo aspoň po niekoľkotýždňovej tematicky i metodologicky úplne odlišnej práci krúžku. Pri nepretržitom pokračovaní v téme podľa uvedeného plánu žiaci síce objavili analógiu s riešením predchádzajúcich úloh, samostatne a správne navrhli myšlienkový postup i vhodnú symboliku, no samo dosť zdĺhavé počítanie všetkých rôznych obdĺžnikov v štvorcovej sieti ich už nebavilo. Z činnosti detí sa postupne vytrácalo pracovné nadšenie, hravosť, súťaživosť, radosť z objavovania. Učivo síce v podstate pochopili (z hodnotenia priebežných testov i záverečného testu vyplýva, že učivo v plnom rozsahu zvládlo až 80 % detí), no podľa môjho názoru menej by bolo v tomto prípade viac. Ďalší priebeh krúžku preto neuvádzam. Záujemci nájdu riešenie úloh o obdĺžnikoch v literatúre uvedenej v úvode článku.