DVE RELÁCIE MEDZI PRVKAMI TROJUHOLNÍKA

EVA NYULASSYOVÁ, Bratislava

Časopis American Mathematical Monthly (roč. 1974, 81, 406) uvádza elementárny problém — dve menej známe relácie medzi prvkami trojuholníka:

Nech a, b, c sú strany trojuholníka ABC a nech m_a, t_a, v_a sú os uhla, ťažnica a výška príslušné ku strane a. Ukážte, že

$$\frac{m_a}{m_a} \geqq \frac{(b+c)^2}{4bc} \tag{1}$$

$$\frac{t_a}{v_a} \geqq \frac{b^2+c^2}{2bc} \tag{2}$$

Kedy platí rovnosť?

Riešenie tohto problému je možné vykonať na cvičení z matematiky alebo v matematickom krúžku na strednej škole. Čo treba vedieť, aby sme úspešne problém vyriešili? Vystačíme so znalosťou stredoškolskej látky z trigonometrie, t. j. kosínusovej vety, vzorcov pre sínus a kosínus polovičného a dvojnásobného uhla trojuholníka, vzorcov pre obsah trojuholníka.

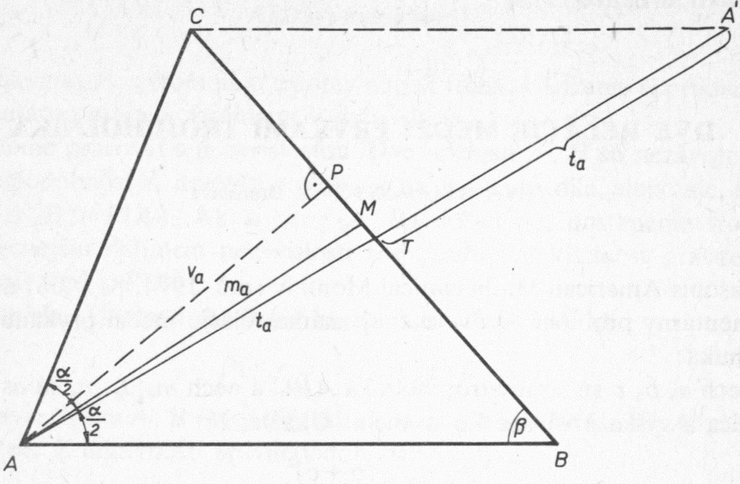
Riešenie

Z platnosti kosínusovej vety pre trojuholníky ABC a $AA'C$ vyplýva *(obr. 1)*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \tag{3}$$

$(2t_a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180° - \alpha)$, odkiaľ máme

$$t_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha}{4}}$$



Obr. 1

a dosadením z (3)

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \qquad (4)$$

Do známych vzorcov pre polovičné uhly dosadíme z (3)

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$
$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} \qquad (5)$$

Pre obsahy trojuholníkov *ATC*, *ATB* a *ABC* platí

$$\frac{1}{2}m_a \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}m_a \cdot c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

vzhľadom na vzorec $\sin\alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ a na vzorce (5), ktoré možno použiť bez absolútnych hodnôt (nakoľko v každom trojuholníku je polovičný uhol menší nanajvýš rovný 90°, t. j. sínus i kosínus sú nezáporné čísla) dostávame pre m_a:

$$m_a = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

Dôkaz vzťahu (1). Nepriamo: Nech

$$\frac{t_a}{m_a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{\frac{\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}}{b+c}} < \frac{(b+c)^2}{4bc} \tag{6}$$

túto nerovnosť možno umocniť (ak a, b, c sú strany trojuholníka, potom ľavá i pravá strana nerovnosti (6) je kladné číslo; tu si pripomenieme, že $2(b^2+c^2)-a^2>0$, čo vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti); potom dostávame

$$4b^2c^2(b+c)^2[2(b^2+c^2)-a^2] < (b+c)^4 bc \cdot [(b+c)^2 - a^2]$$

a vzhľadom na to, že $b>0$, $c>0$ je ďalej

$$a^2(b-c)^2 < (b-c)^4$$

Ak $b=c$, nastane rovnosť vo vzťahu (1). Ak $b \neq c$, potom elementárnymi úpravami dostávame nerovnosť

$$a^2 < (b-c)^2$$

ktorú možno odmocniť a máme

$$a < |b-c|$$

čo je spor s trojuholníkovou nerovnosťou a odtiaľ vyplýva platnosť vzťahu (1).

Pre výšku v_a ku strane a platí

$$v_a = c \cdot \sin\beta = 2c \cdot \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

Modifikáciou vzorcov (5) a dosadením za $\sin\frac{\beta}{2}$ a $\cos\frac{\beta}{2}$ máme pre v_a

$$v_a = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}$$

Dôkaz vzťahu (2). Nepriamo: Nech

$$\frac{t_a}{v_a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}} < \frac{b^2+c^2}{2bc}$$

túto nerovnosť možno umocniť (ľavá i pravá strana nerovnosti je kladné číslo; skutočnosť, že $4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2 > 0$ vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti); elementárnymi úpravami dostávame nerovnosť

$$4a^2b^2c^2[2b^2+2c^2-a^2] < (b^2+c^2)^2[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]$$

a ďalej

$$a^4(b^2-c^2)^2 - 2a^2(b^2+c^2)(b^2-c^2)^2 + [(b^2+c^2)(b^2-c^2)]^2 < 0$$

Ak $b = c$, nastane rovnosť vo vzťahu (2). Ak $b \neq c$, $b > 0$, $c > 0$, potom elementárnymi úpravami dostávame nerovnosť

$$[a^2-(b^2+c^2)]^2 < 0$$

ktorá neplatí pre žiadnu trojicu reálnych čísel a, b, c. Odtiaľ vyplýva platnosť vzťahu (2).

Rovnosť vo vzťahoch (1) a (2) nastane v prípade rovnoramenného trojuholníka s ramenami b, c ($b = c$), v ostatných prípadoch platí ostrá nerovnosť.

Z metodického hľadiska si riešením tejto úlohy osvojíme použitie platných vzorcov pre prvky trojuholníka, precvičíme operácie s nerovnosťami, overíme metódu nepriameho dôkazu na potvrdenie platnosti daných relácií a v neposlednom rade precvičíme počítanie s mocninami a uplatníme logické úvahy pri jednotlivých krokoch dôkazu ako i v diskusii úlohy.

Literatúra

[1] American Mathematical Monthly, Volume 81, 1974, č. 4, 406.

[2] Medek V., Mišík L., Šalát T.: Repetitórium stredoškolskej matematiky, Alfa, Bratislava 1975, 327.