O ZHODNOSTI V ROVINE

ONDREJ ŠEDIVÝ, Nitra

S pojmom zhodnosť v rovine sa stretávame často v matematike i mimo nej. V tomto článku ukážeme, že množina všetkých zhodností v rovine tvorí grupu, pričom binárnou operáciou je „skladanie zhodností".

Predpokladáme, že čitateľ je oboznámený s pojmami zobrazenie, prosté zobrazenie, bijektívne zobrazenie, skladanie zobrazení, inverzné zobrazenie.

1. Definícia a vlastnosti zhodnosti v rovine

Vzdialenosť bodov A, B budeme označovať $|AB|$, obrazy bodov A, B budeme označovať A', B'.

1,1. Definícia. Zhodným zobrazením (zhodnosťou alebo premiestnením) v rovine π nazývame každé bijektívne zobrazenie $\sigma: \pi \to \pi$, pri ktorom pre ľubovoľné body $A, B \in \pi$ a ich obrazy platí $|AB| = |A'B'|$.

1,2. Veta. V zhodnom zobrazení σ obrazom úsečky AB je úsečka $A'B'$ zhodná s AB.

Dôkaz. Nech $X \in \pi$ je ľubovoľný bod úsečky AB, potom podľa definície 1,1 je

$$|AX| = |A'X'| \tag{1}$$

$$|BX| = B'X' \tag{2}$$

kde X' je obraz bodu X v zhodnosti σ.

Sčítaním rovnosti (1), (2) dostaneme

$$|AX| + |BX| = |A'X'| + |B'X'| \tag{3}$$

Pretože $X \in AB$, platí

$$|AX| + |BX| = |AB|$$

potom

$$|A'B'| = |AB| = |AX| + |BX| = |A'X'| + |B'X'|$$

z čoho vyplýva, že $X' \in A'B'$.

Keby $X' \notin A'B'$, potom podľa trojuholníkovej nerovnosti by platilo

$$|A'X'| + |B'X'| > |A'B'|$$

Dôkaz toho, že každý bod úsečky $A'B'$ je obrazom niektorého bodu úsečky AB v zhodnosti σ, urobíme tak, že pre zobrazenie σ^{-1}, ktoré je inverzným k zhodnosti σ(toto vždy existuje a je zhodnosť), zopakujeme postup uvedený v prvej časti dôkazu.

1,3. Veta. V zhodnom zobrazení σ v rovine

a) obrazom polpriamky $\overrightarrow{AB}$ je polpriamka $\overrightarrow{A'B'}$; obrazy opačných polpriamok sú opačné polpriamky; obrazom priamky $\overleftrightarrow{AB}$ je priamka $\overleftrightarrow{A'B'}$;

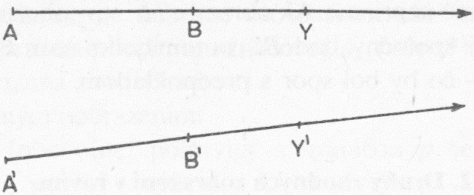
b) obrazom polroviny pA je polrovina $p'A'$; obrazy opačných polrovín sú opačné polroviny;

c) obrazom uhla $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A'V'B'$ zhodný s uhlom $\sphericalangle AVB$;

d) obrazy rovnobežných priamok sú rovnobežné priamky.

Dôkaz. a) Na základe tvrdenia vety 1,2 stačí vyšetriť polohu bodu Y', ktorý je obrazom ľubovoľného bodu Y na predĺžení úsečky AB za bodom B (*obr. 1*). Pretože bod B je medzi bodmi A, Y, podľa tvrdenia vety 1,2 je bod B' medzi bodmi A', Y'. Odtiaľ a z inverzného zobrazenia σ^{-1} vyplýva, že obrazom polpriamky $\overrightarrow{AB}$ je polpriamka $\overrightarrow{A'B'}$. Analogicky dokážeme aj ďalšie tvrdenia uvedené v a).

b) Z tvrdenia vety 1,3 je zrejmé, že $A \notin p$. Potom aj $A' \notin p'$. Nech X je ľubovoľný bod roviny π, ktorý neinciduje s priamkou p a nesplýva ani s bodom A; potom jeho obraz $X' \notin p'$, $X' \neq A'$. Ak leží bod priamky p medzi bodmi A, X, potom leží zodpovedajúci bod priamky p' v zhodnosti

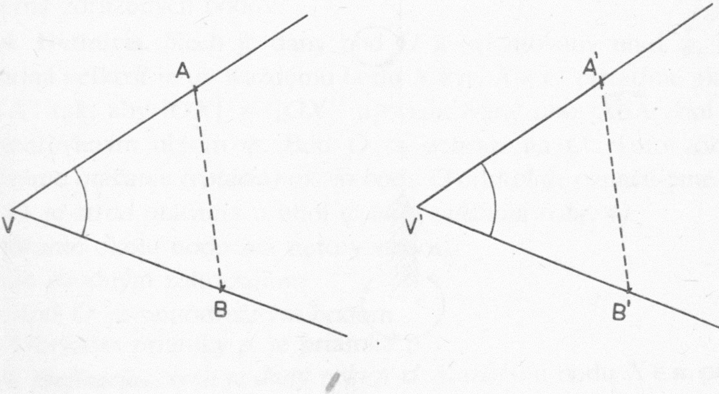


Obr. 1

σ medzi A', X'. Ak neoddeľuje p body A, X, neodeľuje ani priamka p' body A', x'. To znamená, že obrazom polroviny pA v zhodnosti σ je polrovina $p'A'$ a polrovina opačná k pA sa zobrazí na polrovinu opačnú k $p'A'$.

c) Nech A, V, B sú tri nekolineárne body, potom aj ich obrazy A', V', B' sú nekolineárne body (*obr. 2*). Polroviny $\overrightarrow{AVB}$, $\overrightarrow{BVA}$ sa zobrazia po rade na polroviny $\overrightarrow{A'V'B'}$, $\overrightarrow{B'V'A'}$. Prienik polrovín $\overrightarrow{AVB}$, $\overrightarrow{BVA}$, t. j. uhol $\sphericalangle AVB$, sa zobrazí na prienik polrovín $\overrightarrow{A'V'B'}$, $\overrightarrow{B'V'A'}$, t. j. na uhol $\sphericalangle A'V'B'$.

Trojuholníky AVB, $A'V'B'$ sú zhodné (podľa vety sss v dôsledku vety 1,2), a preto $\sphericalangle AVB = \sphericalangle A'V'B'$.



Obr. 2

d) Dôkaz urobíme nepriamo. Ak obrazy a', b' rovnobežných priamok a, b $(a \neq b)$ by mali spoločný bod P', potom jeho vzor P by ležal na a a súčasne na b — čo by bol spor s predpokladom.

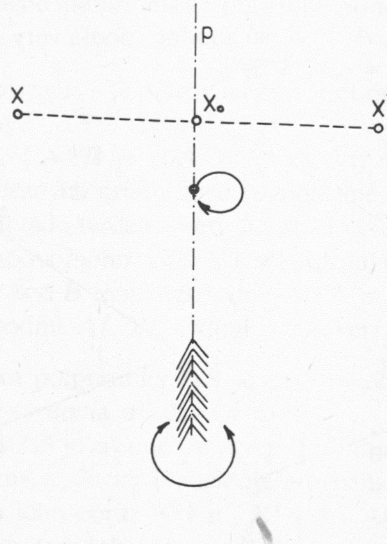
2. Druhy zhodných zobrazení v rovine

Uvedieme definície jednotlivých druhov zhodných zobrazení v rovine. Nebudeme však dokazovať vlastnosti jednotlivých zhodných zobrazení.

2,1. Definícia. Zobrazenie $\mathcal{J}: \pi \to \pi$, ktoré priraďuje každému bodu $A \in \pi$ ten istý bod, nazýva sa *identické zobrazenie* alebo identita.

Každý bod ako vzor splýva so svojím obrazom. Toto zobrazenie zrejme je zhodným zobrazením.

2,2. Definícia. Nech je daná priamka p. Každému bodu $X \in \pi$, $X \notin p$ priraďme bod $X' \in \pi$ tak, aby $\overleftrightarrow{XX'} \perp p$, $\overleftrightarrow{XX'} \cap p = X_0$, $|XX_0| = |X'X_0|$ a $\overrightarrow{X_0X}$, $\overrightarrow{X_0X'}$ sú opačné polpriamky. Bodu $X \in p$ priraďme bod



Obr. 3

$X' = X$. Toto zobrazenie nazvime *osová súmernosť* a priamku p *osou súmernosti*, zobrazenie budeme označovať σ_p (*obr. 3*).

Zobrazenie σ_p má tieto vlastnosti:

a) Je zhodným zobrazením.

b) Obrazom ľubovoľnej polroviny s hranicou p je polrovina k nej opačná.

c) Každý bod priamky p je samodružným bodom zobrazenia σ_p.

d) Obrazom ľubovoľnej priamky v σ_p je priamka. Každý bod $A \in \pi$, $A \in p$ so svojím obrazom A' v σ_p tvoria involutornú dvojicu bodov.

f) Osová súmernosť σ_p je jednoznačne určená priamkou p.

2,3. Definícia Nech je daný bod S. Každému bodu $X \in \pi$, $X \neq S$, priradíme obraz $X' \in \pi$ tak, že $|SX| = |SX'|$, polpriamky $\overrightarrow{SX}$ $\overrightarrow{SX'}$, sú opačné polpriamky priamky $\overleftrightarrow{XX'}$. Bodu $X = S$ priraďme $X' \times X$. Toto zobrazenie nazývame *stredová súmernosť*, bod S je *stred súmernosti*, zobrazenie označujeme σ_S.

Stredová súmernosť σ_S má tieto vlastnosti:

a) σ_s je zhodné zobrazenie.

b) Obrazom každej priamky je priamka s ňou rovnobežná.

c) Priamka, ktorá prechádza stredom S, je samodružná. Bod S je jediný samodružný bod.

d) Je involutorné zobrazenie.

e) Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom alebo dvojicou súmerne združených bodov.

2,4. Definícia. Nech je daný bod O a orientovaný uhol $\hat{\varphi}$, ktorého základná veľkosť je φ. Každému bodu $X \in \pi$, $X \neq O$ priraďme ako obraz bod X' tak, aby $|OX| = |OX'|$ a orientovaný uhol $\widehat{XSX'}$ bol zhodný s orientovaným uhlom $\hat{\varphi}$. Bod O sa zobrazí na O. Toto zobrazenie nazývame *otáčanie (rotácia) okolo bodu O o uhol* $\hat{\varphi}$, označujeme ho $\sigma_{O\Phi}$, bod O je *stred otáčania* a uhol $\hat{\varphi}$ *uhol otáčania (obr. 4)*.

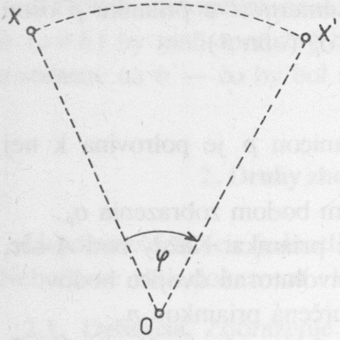
Otáčanie okolo bodu má tieto vlastnosti:

a) Je zhodným zobrazením.

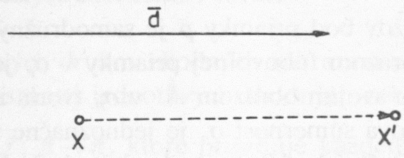
b) Bod O je samodružným bodom.

c) Obrazom priamky p je priamka p'.

2,5. *Definícia*. *Nech je daný vektor* $\mathbf{d}$. Každému bodu $X \in \pi$ priraďme bod $X' \in \pi$ ako obraz tak, aby usporiadaná dvojica $[X, X']$ určovala ten



Obr. 4



Obr. 5

istý vektor $\boldsymbol{d}$. Takto definované zobrazenie je *posunutie* alebo *translácia*, veľkosť $|XX'| = |\boldsymbol{d}|$ je *dĺžka posunutia*, smer vektora je smerom posunutia. Posunutie budeme označovať σ_τ (*obr. 5*).

Posunutie v rovine má tieto vlastnosti:

a) Je zhodné zobrazenie.

b) Obrazom priamky v posunutí σ_τ je priamka s ňou rovnobežná.

c) Je určené vektorom $\boldsymbol{d}$ alebo vzorom a obrazom.

Okrem uvedených zhodných zobrazení je ešte *posunuté zrkadlenie*, ktorého vlastnosti uvedieme v ďalšom.

Inverzné zobrazenia k jednotlivým zhodným zobrazeniam sú:

1. K σ_p je $\sigma_p^{-1} = \sigma_p$.
2. K σ_s je $\sigma_S^{-1} = \sigma_S$
3. K $\sigma_{O,\varphi}$ je $\sigma_{O,\varphi}^{-1} = \sigma_{O,-\varphi}$.
4. K $[\sigma_\tau]$ určené $\boldsymbol{d}$ je σ_τ^{-1} určené $-\boldsymbol{d}$.

3. Skladanie zhodných zobrazení

V ďalšom budeme „skladať“ osové súmernosti, prípadne ďalšie zhodné zobrazenia.

3,1. Definícia. Nech $\sigma_1 : \pi \to \pi$, $\sigma_2 : \pi \to \pi$ sú zhodné zobrazenia v rovine. Označme $X' \in \pi$ obraz bodu $X \in \pi$ v zobrazení σ_1, $X'' \in \pi$ je obraz bodu $X' \in \pi$ v zobrazení σ_2. Tým je každému bodu X roviny π priradený bod $X'' \in \pi$. Priradením $X \mapsto X''$ je definované ďalšie zobrazenie σ_3. Hovoríme, že σ_3 vzniklo zložením zobrazení σ_1, σ_2, čo zapisujeme

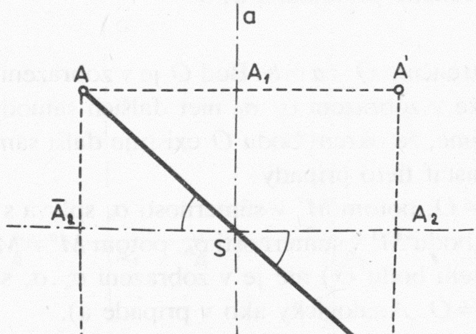
$$\sigma_3 = \sigma_1 . \sigma_2$$

Symbolicky postup zapíšeme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_3 = \sigma_1 . \sigma_2"'] & X' \arrow[r, "\sigma_2"] & X'' \end{tikzcd}$$

3.2. Veta. Zložením dvoch osových súmerností, ktorých osi sú na seba kolmé, vznikne stredová súmernosť, priesečník osí je stredom súmernosti.

D ô k a z: Nech sú dané osové súmernosti σ_a, σ_b s osami a, b, pričom $a \perp b$ (obr. 6), $a \cap b = S$.



Obr. 6

Zostrojme obraz A' bodu A v súmernosti σ_a, ďalej zostrojme obraz A'' bodu A' v súmernosti σ_b. Treba dokázať, že $\sigma_a . \sigma_b = \sigma_S$, t. j. treba dokázať, že bod S je stredom úsečky AA''. Zo zhodnosti trojuholníkov AA_1S, $A'A_1S$ a $\triangle A'A_2S$, $\triangle A''A_2S$ vyplýva, že $|SA| = |SA''|$ a taktiež $\sphericalangle AS\bar{A}_2 = \sphericalangle A''SA_2$. Tým je dokázané, že polpriamky $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SA''}$ sú opačné (teda body A, S, A'' ležia na jednej priamke) a S je stredom úsečky AA''. Ak A je bodom oboch priamok, potom $A = A' = S$.

Z uvedeného súčasne vyplýva, že poradie osových súmerností σ_a, σ_b pri skladaní možno zameniť, dostaneme tú istú stredovú súmernosť. Teda, ak $a \perp b$ platí

$$\sigma_a . \sigma_b = \sigma_b . \sigma_a = \sigma_S \tag{1}$$

Algebraické vyjadrenie kolmosti priamok a, b je vzťah (1).

3,3. Veta. Zložením dvoch osových súmerností σ_a, σ_b s rôznobežnými osami a, b, $a \not\perp b$, dostaneme otočenie, v ktorom stredom otáčania je priesečník osí a, b. Veľkosť uhla otáčania sa rovná dvojnásobku veľkosti ostrého uhla určeného priamkami a, b.

Dôkaz. 1. Označme $O = a \cap b$. Bod O je v zobrazení $\sigma_a . \sigma_b$ samodružný. Ukážeme, že v zobrazení $\sigma_a . \sigma_b$ niet ďalších samodružných bodov.

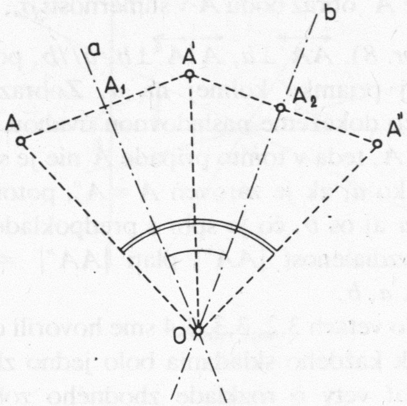
Predpokladajme, že okrem bodu O existuje ďalší samodružný bod M. Potom môžu nastať tieto prípady:

a) $M \in a$, $M \neq O$, potom M' v súmernosti σ_a splýva s bodom M; nech M'' je obrazom bodu M' v súmernosti σ_b, potom $M'' \neq M$, čiže žiaden bod priamky a (okrem bodu O) nie je v zobrazení $\sigma_a . \sigma_b$ samodružný.

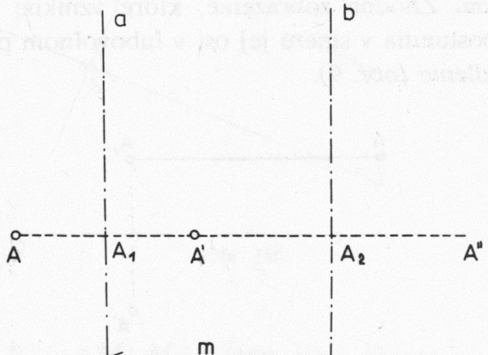
b) $M \in b$, $M \neq O$. Analogicky ako v prípade a).

c) M neleží ani na jednej z priamok a, b. Označme M' obraz bodu M v súmernosti σ_a, potom a je osou úsečky MM'. Podľa predpokladu M je samodružný bod zobrazenia $\sigma_a . \sigma_b$, potom musí byť $M = M''$, kde M'' je obraz bodu M v zobrazení $\sigma_a . \sigma_b$. Obraz bodu M' v súmernosti σ_b je bod M''. Na základe predchádzajúceho je b osou úsečky $M'M''$, avšak podľa predpokladu je $M'' = M$, teda b je aj osou úsečky MM' a potom $a = b$, čo je spor s predpokladom.

2. Zo súmerností σ_a, σ_b vyplýva, že $|OA| = |OA'| = |OA'|$. Taktiež $\sphericalangle AOA'' = 2 \sphericalangle ab$ (*obr.* 7).



Obr. 7



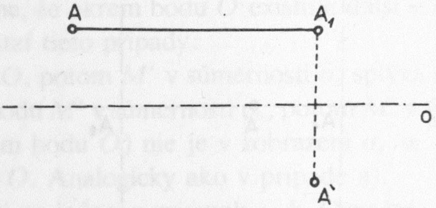
Obr. 8

3,4. Veta. Zložením dvoch osových súmerností s osami rôznymi rovnobežnými vznikne posunutie.

Dôkaz. Označme A' obraz bodu A v súmernosti σ_a, A'' obraz bodu A' v súmernosti σ_b (*obr. 8*). $\overleftrightarrow{AA'} \perp a$, $\overleftrightarrow{A'A''} \perp b$, $a // b$, potom body A, A', A'' ležia na jednej priamke kolmej na a. Zobrazenie $\sigma_a . \sigma_b$ nemá samodružné body, čo dokážeme nasledovnou úvahou. Ak $A \in a$, potom $A' = A$, avšak $A'' \neq A$, teda v tomto prípade A nie je samodružný. Ak je bod A mimo priamku a, ak je zároveň $A = A''$, potom stredom úsečky AA' prechádza os a aj os b, čo je spor s predpokladom, pretože $a \neq b$, teda $A \neq A''$. Pre vzdialenosť $|AA''|$ platí $|AA''| = 2m$, kde m je vzdialenosť priamok a, b.

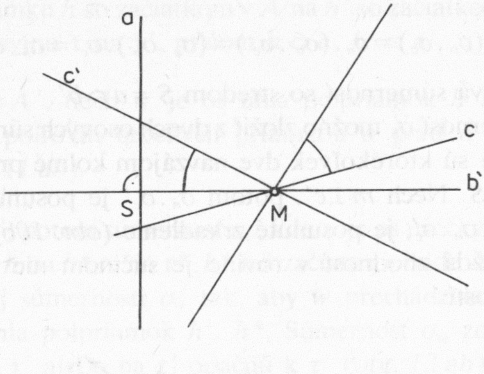
3,5. Poznámka. Vo vetách 3,2, 3,3, 3,4 sme hovorili o skladaní osových súmerností, výsledok každého skladania bolo jedno zhodné zobrazenie. Možno však dokázať vety o rozklade zhodného zobrazenia na súčin osových súmerností. Napr.: Nech A, A' sú dva rôzne body. Existuje jediné posunutie $\sigma_\tau = \sigma_a . \sigma_b$, v ktorom bod A sa zobrazí do bodu A'. Za os jednej súmernosti možno zvoliť ľubovoľnú priamku kolmú na smer posunutia, druhá os je už jednoznačne určená.

3,6. Definícia. Zhodné zobrazenie, ktoré vznikne zložením osovej súmernosti a posunutia v smere jej osi v ľubovoľnom poradí, nazývame *posunuté zrkadlenie (obr. 9)*.

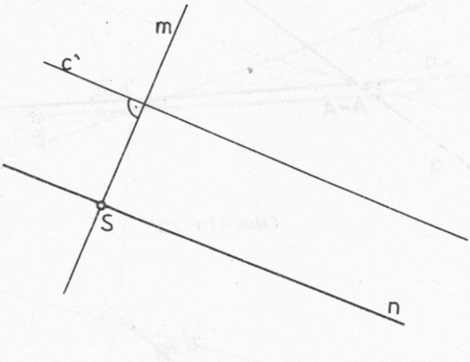


Obr. 9

3,7. Veta. Súčin $\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c$ troch osových súmerností σ_a, σ_b, σ_c s osami a, b, c, z ktorých b, c sú rôznobežné a os a neprechádza ich priesečníkom, je posunuté zrkadlenie.



Obr. 10a



Obr. 10b

Dôkaz. Nech $b \cap c = M$; $M \notin a$ (*obr. 10a*). Potom

$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c = \sigma_a . (\sigma_b . \sigma_c) = \sigma_a . \sigma_{M.\hat{\varphi}}$$

kde $\sigma_{M.\hat{\varphi}}$ je otáčanie so stredom M a uhlom $\hat{\varphi}$. Otáčanie v zmysle poznámky 3,5 možno rozložiť na súčin dvoch osových súmerností, kde jednu os môžeme zvoliť ľubovoľne tak, aby prechádzala bodom M. Nech $\sigma_{M.\hat{\varphi}} = \sigma_{b'} . \sigma_{c'}$, pričom $b' \perp a$.

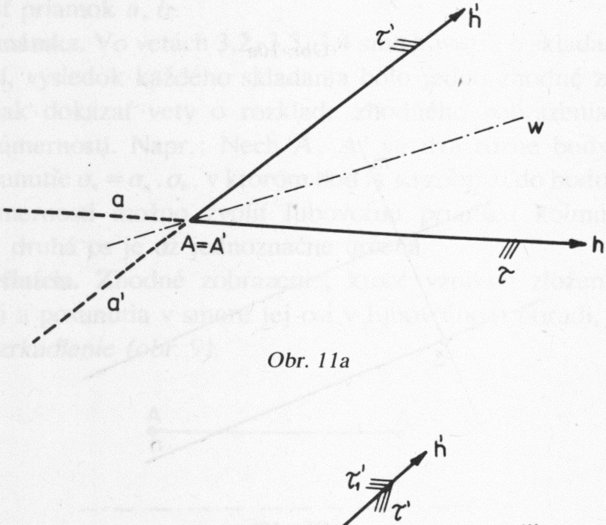
Potom

$$\sigma_a . (\sigma_b . \sigma_c) = \sigma_a . (\sigma_{b'} . \sigma_{c'}) = (\sigma_a . \sigma_{b'}) . \sigma_{c'} = \sigma_S . \sigma_{c'}$$

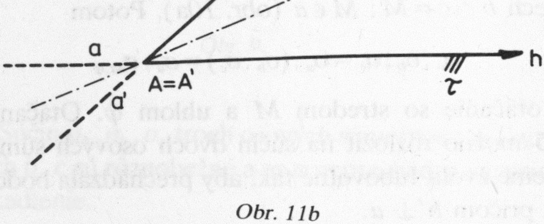
kde σ_S je stredová súmernosť so stredom $S = a \cap b'$.

Stredovú súmernosť σ_S možno zložiť z dvoch osových súmerností σ_m, σ_n, ktorých osi m, n sú ktorékoľvek dve navzájom kolmé priamky, prechádzajúce bodom S. Nech $m \perp c'$, potom $\sigma_n . \sigma_c{}'$ je posunutie a v zmysle definície 3,6 $\sigma_m . \sigma_n . \sigma_c$, je posunuté zrkadlenie *(obr. 10b).*

3,8. Veta. Každá zhodnosť v rovine je súčinom nie viac ako troch osových súmerností.



Obr. 11a

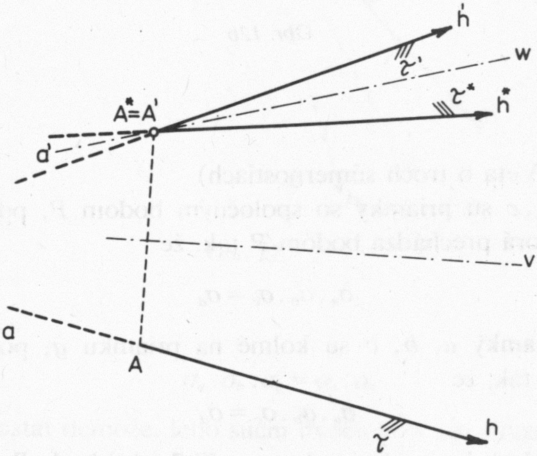


Obr. 11b

Dôkaz. Označme danú zhodnosť α. Nech zhodnosť α zobrazí bod A na bod A', polpriamku h so začiatkom v A na h' so začiatkom v A', priamku a na a' a polrovinu τ na τ', pričom $h \subset a$, $h' \subset a'$.

1. Nech $A = A'$, nech w je os uhla polpriamok h a h'. Vzhľadom na zobrazenie polrovín určených priamkou a platí $\alpha = \sigma_w$ alebo $\alpha = \sigma_w . \sigma_a$, (*obr. 11 ab*).

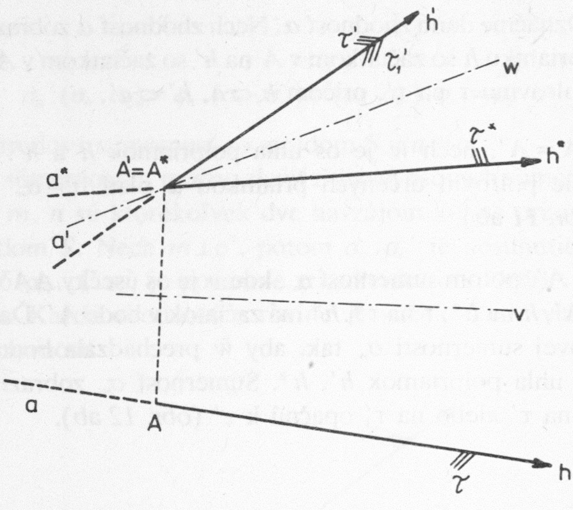
2. Ak $A \neq A'$, potom súmernosť σ_v, kde v je os úsečky AA', zobrazuje A na $A^* = A'$, h na h^*, τ na τ^*. h^* má začiatok v bode A'. Ďalej zvolíme w za os osovej súmernosti σ_w tak, aby w prechádzala bodom $A = A'$ a bola osou uhla polpriamok h'. h^*. Súmernosť σ_w zobrazí h^* na h', polrovinu τ na τ' alebo na τ_1' opačnú k τ' (*obr. 12 ab*).



Obr. 12a

V druhom prípade treba ešte zvoliť osovú súmernosť $\sigma_{a'}$, ktorá zobrazí polrovinu τ_1' na τ'.
Teda platí

$$\alpha = \sigma_v . \sigma_w$$



Obr. 12b

alebo

$\alpha = \sigma_v . \sigma_w . \sigma_{a'}$,

3,9. Veta. (Veta o troch súmernostiach)

a) Ak a, b, c sú priamky so spoločným bodom P, potom existuje priamka d, ktorá prechádza bodom P tak, že

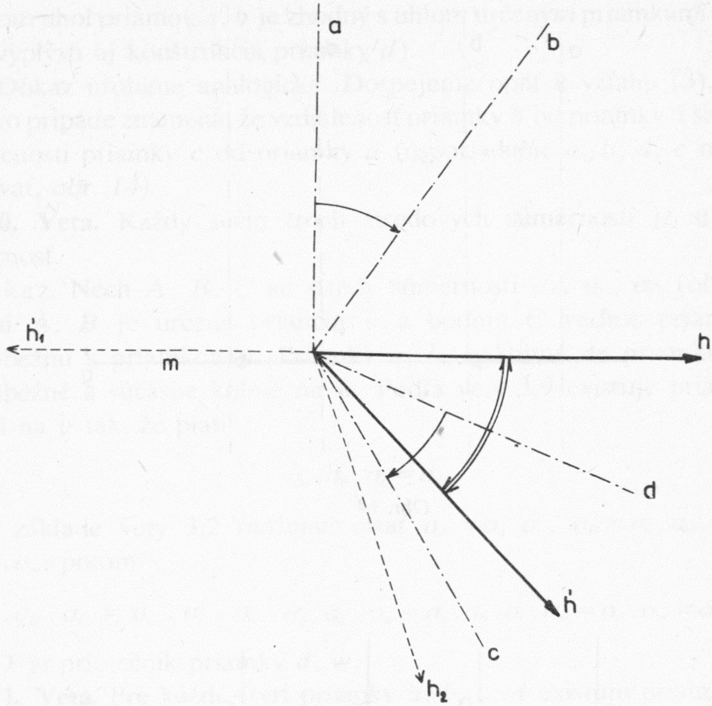
$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c = \sigma_d$$

b) Ak priamky a, b, c sú kolmé na priamku g, potom existuje priamka $d \perp g$ tak, že

$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c = \sigma_d$$

Dôkaz. a) Nech h je polpriamka so začiatkom v bode P, $h \subset m$, nech $m \perp a$, τ a $\bar{\tau}$ sú polroviny určené priamkou m. Zobrazenie $\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c$ zobrazí polpriamku h na polpriamku h' so začiatkom v bode P, polrovinu τ na polrovinu τ', ktorej hraničná priamka obsahuje polpriamku h'. Osová súmernosť σ_d, ktorej os d je osou uhla určeného polpriamkami h, h', zobrazí bod P na P, polpriamku h na h', polrovinu τ na τ' alebo $\bar{\tau}'$. Potom platí

$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c = \sigma_d \tag{1}$$



Obr. 13

alebo

$$\sigma_a \,.\, \sigma_b \,.\, \sigma_c = \sigma_a \,.\, \sigma_d \tag{2}$$

Prípad (2) nastať nemôže, lebo súčin dvoch osových súmerností nemôže byť osová súmernosť (*obr. 13*).

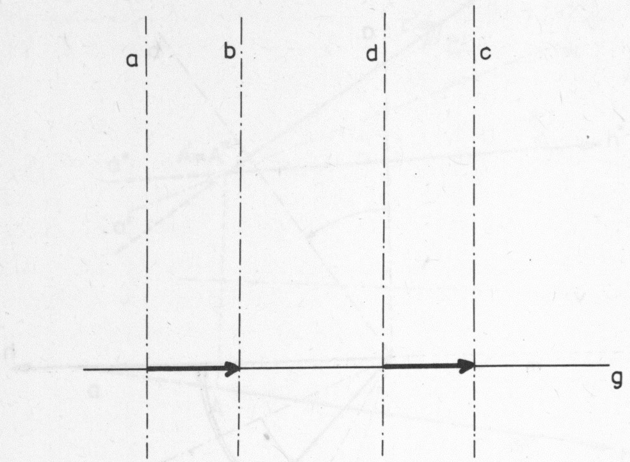
Zo vzťahu (1) vyplýva

$$\sigma_a \,.\, \sigma_b \,.\, \sigma_c \,.\, \sigma_c = \sigma_d \,.\, \sigma_c$$

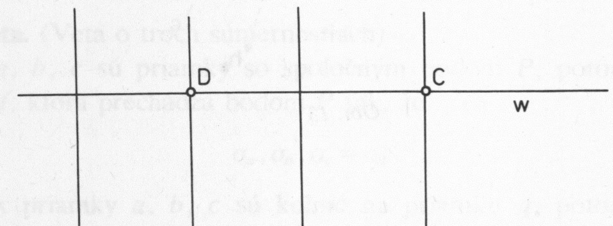
čiže

$$\sigma_a \,.\, \sigma_b = \sigma_d \,.\, \sigma_c \tag{3}$$

pretože $\sigma_c \,.\, \sigma_c = \mathscr{I}$.



Obr. 14



Obr. 15

Potom uhol priamok a, b je zhodný s uhlom určeným priamkami d, c (z toho vyplýva aj konštrukcia priamky d).

b) Dôkaz urobíme analogicky. Dospejeme opäť k vzťahu (3), ktorý v tomto prípade znamená, že vzdialenosť priamky b od priamky a sa rovná vzdialenosti priamky c od priamky d (usporiadanie a, b, d, c musíme zachovať, *obr. 14*).

3,10. Veta. Každý súčin troch stredových súmerností je stredová súmernosť.

Dôkaz. Nech A, B, C sú stredy súmerností σ_A, σ_B, σ_C (*obr. 15*). Bodmi A, B je určená priamka v a bodom C veďme priamku w rovnobežnú s priamkou v. Priamky a, b, c kolmé na priamku v sú rovnobežné a súčasne kolmé na w. Podľa vety 3,9 existuje priamka d kolmá na v tak, že platí

$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c = \sigma_d$$

Na základe vety 3,2 môžeme písať $\sigma_A = \sigma_a . \sigma_v$, $\sigma_B = \sigma_v . \sigma_b$, $\sigma_C = \sigma_c . \sigma_w$, potom

$$\sigma_A . \sigma_B . \sigma_C = \sigma_a . \sigma_v . \sigma_v . \sigma_b . \sigma_c . \sigma_w = \sigma_a . \sigma_b . \sigma_c . \sigma_w = \sigma_d . \sigma_w = \sigma_D$$

kde D je priesečník priamky d, w.

3,11. Veta. Pre každé štyri priamky a, b, c, d existujú priamky x, y také, že platí $\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c . \sigma_d = \sigma_x . \sigma_y$.

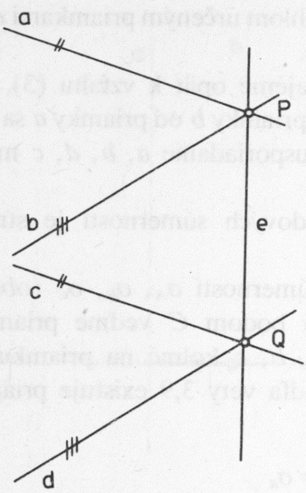
Dôkaz. a) Rovnosť $\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c . \sigma_d = \sigma_x . \sigma_y$ bude zrejme splnená v prípade, že niektoré dve „susedné" priamky štvorice $[a, b, c, d]$ sú totožné, alebo v prípade, že niektoré tri priamky štvorice patria tomu istému zväzku.

b) Ak priamky a, b, c, d nespĺňajú podmienky uvedené v bode a), potom budeme rozlišovať tri prípady znázornené na *obr. 16abc*.

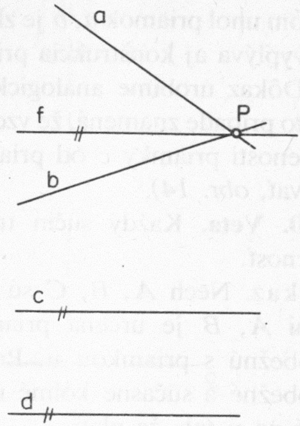
V prípade α) môžeme zostrojiť priamku e určenú bodmi P, Q, potom platí

$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c . \sigma_d = \underbrace{\sigma_a . \sigma_b . \sigma_e}_{\sigma_x} . \underbrace{\sigma_e . \sigma_c . \sigma_d}_{\sigma_y} = \sigma_x . \sigma_y \, .$$

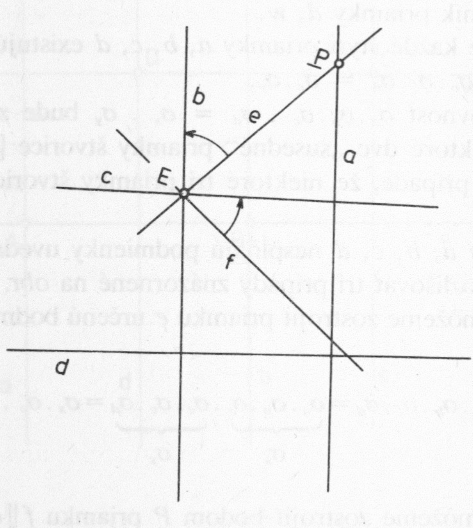
V prípade β) môžeme zostrojiť bodom P priamku $f \parallel c$. Potom opäť dospejeme k správnosti vzťahu uvedeného vo vete 3,11.



Obr. 16a



Obr. 16b



Obr. 16c

V prípade γ) zostrojme bodom E ľubovoľnú priamku e, ktorá pretne priamku a v bode P. Potom platí

$$\sigma_a . \sigma_b . \sigma_c . \sigma_d = \sigma_a . \sigma_e . \underbrace{\sigma_e . \sigma_b . \sigma_c}_{\sigma_f} . \sigma_d = \sigma_a . \sigma_e . \sigma_f . \sigma_d .$$

Pretože priamky e, a sa pretínajú, môžeme spôsobom α, β) odvodiť platnosť tvrdenia vety 3,11.

3,12. Veta (Veta o redukcii počtu osových súmerností)
Súčin ľubovoľného párneho počtu osových súmerností sa rovná súčinu dvoch osových súmerností. Súčin ľubovoľného nepárneho počtu osových súmerností sa rovná jednej alebo súčinu troch osových súmerností.

Dôkaz. Pre ľubovoľné $n \geqq 4$ platí: $n = 4 + (n-4)$. Podľa vety 3,11 sa súčin ľubovoľných štyroch osových súmerností rovná súčinu istých dvoch. Celkový počet n osových súmerností možno redukovať na $2 + (n-4) = n-2$. Týmto spôsobom môžeme od ľubovoľného párneho n dôjsť po konečnom počte krokov k číslu 2.

Od nepárneho n môžeme dôjsť k číslu 3. V niektorých prípadoch súčin troch osových súmerností sa rovná jednej osovej súmernosti.

3,13. Definícia. Zobrazenie zložené z párneho počtu osových súmerností sa nazýva *priama zhodnosť*. Zobrazenie zložené z nepárneho počtu osových súmerností sa nazýva *nepriama zhodnosť*.

3,14. Zhrnutie. V predchádzajúcich častiach sme dokázali, že existujú len tieto druhy zhodných zobrazení: osová súmernosť (jedna os), otáčanie (dve osové súmernosti s rôznobežnými osami), stredová súmernosť (špeciálny prípad otáčania), posunutie (dve osové súmernosti s rovnobežnými osami), posunuté zrkadlenie (tri osové súmernosti — dve osi rôznobežné a tretia neprechádza ich priesečníkom). Ďalej sme dokázali, že súčin troch osových súmerností s osami patriacimi tomu istému zväzku je jedna osová súmernosť. Podľa viet vyššie uvedených, súčin ľubovoľného počtu osových súmerností možno redukovať na dve alebo tri, resp. jednu osovú súmernosť, teda na niektorú z daných druhov zhodných zobrazení. Taktiež sme dokázali, že každú zhodnosť v rovine možno rozložiť najviac na tri osové súmernosti.

Pretože skladanie zhodných zobrazení je asociatívne (dôkaz v našom článku sme nerobili), identita pri skladaní vystupuje v úlohe neutrálneho prvku, inverzné zobrazenie ku každej zhodnosti existuje a je opäť zhodnosť, zloženie dvoch zhodností je opäť zhodnosť, môžeme vysloviť vety:

3,15. Veta. Množina všetkých zhodností roviny tvorí spolu s algebraickou operáciou „skladanie zhodností" *grupu.*

3,16. Veta. Množina všetkých priamych zhodností roviny tvorí s algebraickou operáciou „skladanie zhodností" grupu. Množina nepriamych zhodností netvorí grupu.

Ukázať, že množina nepriamych zhodností s príslušnou operáciou netvorí grupu, možno jednoduchým spôsobom: zloženie dvoch nepriamych zhodností je priama zhodnosť.

Cvičenia

1. Dané sú tri rôzne priamky o_1, o_2, o_3 prechádzajúce bodom O, na priamke O_1 je daný bod A_1. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby priamky o_1, o_2, o_3 boli osami jeho strán a bod A_1 *stredom strany* BC.

2. Sú dané dve pretínajúce sa kružnice. Jedným ich priesečníkom veďte priamku, v ktorej obe kružnice vytnú zhodné tetivy.

3. Dokážte, že pravidelný n-uholník, n je párne, je stredove súmerný.

4. Dané sú dve navzájom kolmé priamky a, b a bod C, ktorý neleží na žiadnej z nich. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC, ktorý má hlavný vrchol v bode C a v ňom uhol danej veľkosti γ. Ďalšie vrcholy A, B ležia po rade na priamkach a, b.

5. Dokážte, že zložením dvoch posunutí vznikne posunutie.

6. Dokážte, že posunuté zrkadlenie možno zložiť z osovej súmernosti a z translácie v smere jej osi.

7. Daná je priamka p a dva body X, Y ležiace v tej istej polrovine s hraničnou priamkou p. Na priamke p zostrojte úsečku AB dĺžky d, aby súčet $|XA| + |AB| + |BY|$ bol čo najmenší.

8. Dokážte, že zloženie žiadnych dvoch osových súmerností sa nerovná jednej osovej súmernosti.

9. Dokážte, že zloženie dvoch stredových súmerností je posunutie.

10. Dokážte, že množina všetkých posunutí v rovine tvorí spolu s algebraickou operáciou „skladanie posunutí" komutatívnu grupu.

Literatúra

Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spegelungsbegriff. Berlín, 1959 (ruský preklad).

Kuřina, F.: Grupy shodnosti roviny. Hradec Králové, 1975.