ŠABLÓNA — PREKÁŽKA TVORIVOSTI

MARIÁN HANULA, Bratislava

Od 1. septembra 1976 sa žiaci prvých ročníkov ZDŠ učia matematiku podľa nových učebných osnov, na gymnáziách je tomu tak už niekoľko rokov. Nielen medzi učiteľmi, no najmä medzi rodičmi sa veľa hovorí o tradičnej metóde vyučovania matematiky i o „modernej množinovej matematike", delíme sa na stúpencov a odporcov tej či onej metódy.

Úloha školy je však jasná. Musí pripraviť žiaka tak, aby bol schopný riešiť situácie, s ktorými sa každodenne stretáva, situácie, ktoré vyriešiť musí a riešenie ktorých sa nedá odložiť na neurčito. Schopnosť riešiť predkladané problémy je najlepším meradlom úrovne osvojenia si znalostí tej či onej sféry ľudskej činnosti. Spĺňajú tradičné vyučovacie metódy túto požiadavku?

Ak skúmame písomné i ústne odpovede žiakov, nemôžeme si nevšimnúť, ako žiaci nerobia dôkladnú analýzu úlohy, ako sa snažia čo najrýchlejšie zostaviť rovnice a prejsť k ich riešeniu. Pritom označenie neznámych i schéma riešenia obyčajne zodpovedá naučenej šablóne. Ide o návyk, či zameranosť myslenia postupovať známym spôsobom, ktorý sa v minulosti ukázal byť vhodným, bez ohľadu na to, či sa podmienky úlohy zmenili alebo nie. Na otázku, prečo nerozmýšľali nad inými spôsobmi riešenia, prečo sa nepokúsili opustiť šablónu, žiaci obyčajne úplne presvedčene vyhlasujú, že šablóna je to najlepšie, že nepotrebujú zložité (a nie vždy určite úspešné) pokusy, že šablóna nás určite dovedie k výsledku. S takýmto názorom nemožno súhlasiť. Obyčajne riešenie úlohy podľa šablóny vedie k zväčšeniu objemu práce a tým k väčšej možnosti urobiť chybu. Môžeme sa o tom presvedčiť na mnohých príkladoch.

Príklad. 1. Riešte rovnicu $5x^2-3x=0$.

Riešenie. Pre vyznavačov šablóny je to kvadratická rovnica, ktorú musíme vyriešiť pomocou známeho vzorca, čiže $D=9$, $\sqrt{D}=3$ atď., hoci kratšie a aj krajšie riešenie je zrejmé, $x(5x-3)=0$, ...

Príklad 2. Dvaja cyklisti vyšli súčasne z miest A, B; každý šiel rovnomerne do protiľahlého miesta a stretli sa 70 km od miesta A. Pokračujúc v pohybe došli do miest A, B, obrátili sa, druhýkrát sa stretli 90 km od miesta B. Určte vzdialenosť miest A, B.

Riešenie. Štandardné riešenie je jasné. Ak označíme v vzdialenosť AB, môžeme zostaviť rovnicu

$$\frac{70}{v-70}=\frac{v+90}{2v-90}$$

Čo keby sme sa neponáhľali so zostavením rovnice? Aj z jednoduchého obrázka je zrejmé, že súčet dráh obidvoch cyklistov sa pri prvom stretnutí rovná vzdialenosti AB, pri druhom stretnutí $3AB$. Prvý cyklista prešiel 70 km, pokiaľ sa stretol prvýkrát s druhým, a keď prešiel $3\cdot 70$ km, stretol sa s ním druhýkrát. Z toho dôvodu sa vzdialenosť miest A, B rovná $210-90=120$ (km).

Príklad 3. Rebrík stojaci na ulici môže byť opretý horným koncom buď o stenu budovy na ľavej strane ulice vo výške 9 m, alebo o budovu na pravej strane vo výške 12 m. Určte dĺžku rebríka a šírku ulice, ak viete, že obidve polohy rebríka sú navzájom kolmé.

Riešenie. Tento príklad riešili na písomnej maturitnej skúške gymnazisti v Toruni (PĽR). Pretože skúška bola z algebry, dospeli buď k riešeniu rovnice

$$\sqrt{2x^2-9}=\sqrt{x^2-81}+\sqrt{x^2-144}$$

alebo sústavy

$$\begin{aligned} x^2-y^2&=81\\ x^2-z^2&=144\\ 2x^2-(y+z)^2&=9 \end{aligned}$$

Stačí však letmý pohľad na obrázok, aby sme zistili, že ide o dva zhodné pravouhlé trojuholníky, ktoré majú odvesny 9 a 12 metrov dlhé, a preto je šírka ulice $9+12=21$ (m) a dĺžka rebríka je $\sqrt{9^2+12^2}=15$ (m).

Príklad 4. Na dvore boli zajace a husi. Mali spolu 10 hláv a 28 nôh. Koľko bolo na dvore zajacov a koľko husí?

Riešenie. Ak označíme z — počet zajacov, h — počet husí, dospejeme k sústave

$$h + z = 10$$
$$2h + 4z = 28$$

Žiaci 3. ročníka ZDŠ s pokusnými učebnými osnovami riešia však tento príklad inak. Ak pridám ku každej hlave dve nohy, ostane mi 8 nôh $(28 - 2 \cdot 10 = 8)$. Tieto nohy patria zajacom a ku každej zajačej hlave musím pridať ešte dve nohy: $8 : 2 = 4$, čiže na dvore sú štyri zajace.

Príklad 5. V aritmetickej postupnosti platí $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$. Určte súčet prvých dvadsiatich členov tejto postupnosti.

Riešenie. Riešiac tento príklad sa žiaci obyčajne pokúšajú určiť prvý člen a diferenciu, namiesto toho, aby začali analýzou. Čo máme určiť? Súčet s_{20}. Vieme, že $s_{20} = 10(a_1 + a_{20})$, alebo po úprave $s_{20} = 10(2a_1 + 19d)$. Čo je dané? Súčet $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$. Z toho však vyplýva, že $4a_1 + 38d = 20$, čiže $2a_1 + 19d = 10$ a príklad je vyriešený.

Jedným z prejavov snahy riešiť úlohy pomocou šablón je aj vyčíslenie všetkých veličín, ktoré sa môžu použiť na určenie neznámej (hľadanej) veličiny. Takto sa úplne ignoruje fakt, že nie vždy všetky z vyčíslených veličín sú potrebné v poslednom výraze.

Príklad 6. Strany podstavy trojbokého ihlana sú 15, 16 a 17 cm dlhé. Bočné hrany zvierajú s rovinou podstavy uhly 45°. Určte objem ihlana.

Riešenie. Pretože žiaci vedia, že pre objem ihlana platí vzťah $V = \frac{1}{3} Pv$ a že výška ihlana sa rovná polomeru kružnice opísanej trojuholníku, ktorý tvorí podstavu, určia objem V postupne:

$$P = \sqrt{24 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 24\sqrt{21} \ (\mathrm{cm}^2)$$

$$v = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{4 \cdot 24\sqrt{21}} = \frac{85}{2\sqrt{21}} \ (\mathrm{cm})$$

$$V = \frac{1}{3}\, 24\sqrt{21} \cdot \frac{85}{2\sqrt{21}} = 340 \ (\mathrm{cm}^3)$$

Túto úlohu však možno riešiť ľahšie takto:

$$V=\frac{1}{3}Pv=\frac{1}{3}P\frac{abc}{4P}=\frac{abc}{12}=\frac{15\cdot 16\cdot 17}{12}\quad (\mathrm{cm}^3)$$

Príklad 7. Betónový stĺp dlhý 7,75 m je zasadený do jednej štvrtiny svojej dĺžky v dne rieky, jedna tretina zvyšku je vo vode. Koľko metrov stĺpa vyčnieva nad hladinu?

Riešenie. Obyčajne sa určí, koľko metrov stĺpa je v dne rieky, koľko je vo vode a potom koľko je metrov nad hladinou. Stačí si však uvedomiť, že vo vode je štvrtina stĺpa a už ľahko zistíme, že nad vodou je polovica stĺpa, čiže 3,875 m.

Príklad 8. Vzdialenosť dvoch miest je 14 km. Z týchto miest súčasne vyšli oproti sebe dvaja chodci pohybujúci sa rovnomerne rýchlosťami 4 km/h a 3 km/h. S jedným z nich vybehol pes rovnomernou rýchlosťou 6 km/h. Pes behal od jedného chodca k druhému až dovtedy, kým sa obaja chodci nestretli. Koľko km nabehal pes?

Riešenie. Pod vplyvom podobných úloh sa snažia žiaci vypočítať dĺžku dráhy psa ako súčet dráh, ktoré bežal jedným a druhým smerom. Ak si však uvedomíme, že dráha závisí od času, je úloha vyriešená. Chodci sa stretnú za dve hodiny, pes teda za ten čas nabehal 12 km.

Slovné úlohy, ktoré nachádzame v zbierkach, sú čerpané z rozličných odborov ľudskej činnosti a sú veľmi rôznorodé. Učitelia v snahe pomôcť žiakom pri rozhodovaní a dať im aspoň obdobu niektorých príkladov, roztrieďujú ich do rozličných typov. Preto existujú typové úlohy na prácu, na pohyb, na zliatiny, na úroky, na vlastnosti číselnej sústavy atď. Vypočítať vzorový príklad na všetky typy je nemožné, lebo ich je priveľa. Tak ani typové úlohy nemôžu byť jediným úspešným vodidlom pri riešení slovných úloh a nezbavujú žiaka nutnosti premýšľať nad prístupom k riešeniu úlohy. Žiaci teda potrebujú pre orientáciu a pre podporu svojho rozhodnutia vzorové úlohy z rozličných typov príkladov, napr. pohybové, o práci a pod., ale potrebujú to ako vzor a nie ako typ, kde tesnou analógiou riešia veľmi obdobné úlohy. Boli a sú aj také príklady, že učiteľ návodnou otázkou: „do akého typu patrí tento príklad?“ uľahčoval žiakovi rozhodovanie pri riešení.

Vypracovanie návykov riešiť viaceré úlohy tým istým spôsobom má aj pozitívny význam, keďže umožňuje pohotovo riešiť úlohy, na ktoré sa príslušný postup hodí, kde je odôvodnený. Šetrí čas a námahu. Výchova by však nemala napomáhať vytváraniu zbytočných či škodlivých návykov v myslení, ktoré sú potom prekážkou nájdenia správneho postupu. Košč uvádza výsledky výskumov Pireho, ktoré ukazujú na deformáciu myšlienkového postoja žiakov k matematickým príkladom, keďže títo sú vedení jednostranne k šablónovitej automatizácii počítania, ktoré vylučuje myslenie. Jeho výskumy ukázali, že deti vo veku 11 až 13 rokov pri styku s akýmkoľvek textom matematickej úlohy dávajú prednosť hľadaniu analógií s podobnými príkladmi z minulej skúsenosti, nesnažia sa vniknúť do úlohy. Ako ďalej uvádza Košč, na celom svete sa zisťuje neúčinnosť pestovania matematického myslenia školou, šablónovitosť prístupu k riešeniu matematických úloh aj u nadaných žiakov, a to na každej úrovni a v každom odvetví matematiky.

Racionálne riešenie úlohy sa zakladá na individuálnych zvláštnostiach podmienok. Rozhodujúcu úlohu tu nenadobúdajú tie rysy príkladu, ktoré ho zaraďujú k určitému typu príkladov, ale tie, ktoré ho z určitého typu vylučujú. Najmä pozornosť venovaná číselným hodnotám parametrov, zvláštnostiam zoskupení, otvára cestu k jednoduchým a prostým riešeniam. Mnohé úlohy je možné riešiť viacerými spôsobmi. Niekedy sú tieto riešenia skoro rovnako ťažké, niekedy je rozdiel v obťažnosti riešenia dosť veľký. Spravidla každý žiak môže nájsť vyhovujúce riešenie, musí len pozorne preskúmať podmienky a porozmýšľať nad tým, ktorý prístup k úlohe najlepšie zodpovedá zvláštnostiam podmienok. Nie šablóna, ale konkrétna analýza podmienok je zárukou úspešného a racionálneho riešenia úlohy.

Literatúra

[1] Časopis „Kvant", roč. 1973, číslo 3.

[2] Jurčová, M.: Psychologicko-pedagogické hľadiská výchovy mládeže k tvorivosti. Prednáška pre KPÚ, Bratislava 1974.

[3] Košč, L.: Psychológia matematických schopností. SPN, Bratislava 1972.

[4] Metodika prepodavanija matematiky. Prosveščenie, Moskva 1975.

[5] Stoljar, A. A.: Logické problémy vyučování matematice. KPÚ, Praha 1969.

[6] Stračár, E.: Moderné vyučovacie metódy v prírodovedných predmetoch. SPN, Bratislava 1964.