

ÚVAHY O NETRADIČNÝCH APLIKÁCIÁCH MATEMATIKY

MILAN MEDVEĎ, Bratislava

Iste už každý rozmyšľal nad zložitou prírodou a divil sa, že napriek obrovskej zložitosti je príroda v takej rovnováhe. Ľudstvo už objavilo základné fyzikálne zákony, prestalo sa diviť, že Slnko vychádza, prestalo sa báť rôznych prírodných javov, no sú ešte oblasti, kde ešte len začína chápať celkom elementárne vzťahy. Je totiž ťažké nájsť v množstve prejavov prírody to najpodstatnejšie. Napríklad rovnovážny stav nejakého systému je taký vzácny a tak ťažko vystihnuteľný, že je pochopiteľné, keď sa nedá vystihnúť len slovami alebo nejakým popisom. Každá hrubá úvaha o rovnovážnom stave je diskutabilná, pretože už našim popisom môžeme opísať prirodzene stabilný systém ako nestabilný a vnieť do popisu určitú dávku subjektívneho pesimizmu. Pokiaľ ľudstvo nepoznalo Keplerove zákony, nemalo dôvod veriť, že každý deň vyjde Slnko. Viera v harmóniu sveta bola len čiastočná, vyplývajúca zo skúseností predkov a podmienená vierou v nadprirodzené sily. Tak, ako pomohla matematika objaviť fyzikálne zákony, je v jej silách pomôcť vysvetliť aj možno oveľa komplikovanejšie tajomstvá prírody. Pri skúmaní prírody máme hlavne ťažkosti v tom, že máme buď málo informácií, alebo získavanie informácií je veľmi náročné na čas a veľmi nákladné. Preto sme často nútení obmedziť sa len na hrubú analýzu problému. Aby sme dostali rozumný poznatok, musíme robiť analýzu opatrne, aby sme nevynechali podstatné fakty. Matematické modely prírodných javov majú tú výhodu, že sú presne popisateľné a že sa môžu hodiť na rôzne situácie. Rôzne prírodné javy majú totiž často rovnakú podstatu, a preto je výhodné vystihnúť tú podstatu, aj keď v abstraktnej forme.

Uvediem príklad aplikácie matematiky bez toho, že by som hovoril o algoritmoch, počítačich strojoch a programoch, ako sa to v poslednom čase dosť často v tejto súvislosti robí. Príklad je z tzv. ekológie, čo je náuka o vzťahoch organizmov k živému alebo neživému prostrediu.

Predstavme si drsné zákony medzi živočíchmi, a aby sme do toho nemuseli zahrnúť človeka, radšej si predstavme nejaký druh rýb. Najskôr uvažujme len jeden druh a budeme sa zaujímať o závislosť počtu jedincov od množstva potravy. Ako sa ukáže, je to úloha veľmi jednoduchá, ak množstvo potravy je konštantné, ale stáva sa zložitejšou, ak potravou je napríklad nejaký iný živočích, ktorý sa tiež množí a zomiera.

Jedinci, samozrejme, zomierajú, rodia sa a tak sa v každom čase mení stav populácie. Predpokladajme, že množstvo jedincov v čase t je $y(t)$. Relatívny

prírastok jedincov za časový interval $[t, t + \Delta t]$ je

$$\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t} \quad (1)$$

Prakticky sa $y(t)$ nájde v čase t_0, t_1, t_2, \dots , keď sa robí sčítanie a hodnoty $y(t)$ sú nezáporné celé čísla. Úvahu však môžeme robiť tak, že $y(t)$ rozšírime na nezápornú reálnu funkciu reálnej premennej. Budeme predpokladať, že funkcia $y(t)$ má spojité derivácie. Potom môžeme prejsť vo vzťahu (1) k limite a dostaneme

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)} \quad (2)$$

Táto funkcia udáva relatívnu rýchlosť rastu populácie v čase t . Teraz uvedieme niekoľko príkladov.

Príklad 1. Najjednoduchší model dostávame za predpokladu, že relatívna rýchlosť rastu populácie je konštantná, t. j. $\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha$, kde α je konštanta. Integrovaním dostávame $y(t) = e^{\alpha t}y(0)$.

O niečo zložitejšie je situácia, keď relatívna rýchlosť rastu populácie je funkcia závislá od množstva potravy, čo ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 2. Predpokladajme, že rýchlosť rastu závisí len od zásob potravín σ , $\sigma \geq 0$. Zrejme existuje minimálna zásoba σ_0 , pri ktorej zostáva relatívna rýchlosť rastu populácie nulová a taká, že pre $\sigma > \sigma_0$ je rýchlosť rastu kladná a pre $\sigma < \sigma_0$ je rýchlosť rastu záporná. Najjednoduchšou funkciou, ktorá modeluje túto situáciu, je lineárna funkcia $\alpha = a(\sigma - \sigma_0)$, $a > 0$, kde a je konštanta závislá len od druhu živočíchov. Dostávame rovnicu

$$\frac{dy}{dt} = a(\sigma - \sigma_0)y(t) \quad (3)$$

Riešením tejto rovnice je funkcia $y(t) = \exp[ta(\sigma - \sigma_0)]y(0)$. Pretože vieme, že v praxi $y(t)$ nadobúda hodnoty prirodzené čísla, tak $y(t) \rightarrow 0$ (nastáva pri $\sigma < \sigma_0$) značí, že živočích vymiera za konečný čas.

Pomerne zložitejšia je už situácia v nasledujúcom príklade, kde na zistenie vlastností modelu je už potrebná hlbšia analýza modelu.

Príklad 3. Uvažujme teraz dva druhy živočíchov. Nech množstvo jedincov jedného druhu je x a množstvo druhého y . Nech druh y je dravec a jeho potravou je x . Z rovnice (3) potom dostávame rovnicu

$$\dot{y} = a(x - \sigma_0)y \quad (4)$$

kde $a > 0$, $\sigma_0 > 0$ sú konštanty. Podobne zmena množstva druhu x je popísaná rovnicou

$$\dot{x} = -b(y - \tau_0)x \quad (5)$$

kde $b > 0$, $\tau_0 > 0$ sú konštanty. Prepíšme rovnice (4) a (5) do nasledujúceho tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - By)x \\ \dot{y} &= (Cx - D)y\end{aligned}\quad (6)$$

kde $A, B, C, D > 0$ sú konštanty. Rovnice systému (6) sú tzv. rovnice Volterrove—Lotkove.

Skôr, než sa pokúsime urobiť uzávery zo systému (6), budeme potrebovať niekoľko základných pojmov a tvrdení z teórie dynamických systémov. Keďže naša úloha je dvojrozmerná, budú nám stačiť tvrdenia pre dynamické systémy v rovine. Úvahy pre úlohy vyššej dimenzie sú značne komplikované a nie sú také jasné ako v prípade roviny.

Pod dynamickým systémom na 2-rozmernom euklidovskom priestore R^2 (analogicky sa môže definovať aj na n -rozmernom euklidovskom priestore) rozumieme systém diferenciálnych rovníc

$$\dot{x} = f(x) \quad (7)$$

kde $f: R^2 \rightarrow R^2$, $f = (f_1, f_2)$, $x = (x_1, x_2)$ t. j. systém rovníc

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Budeme predpokladať, že funkcie f_1, f_2 majú spojité parciálne derivácie na R^2 , t. j. $f \in C^1$ na R^2 . Priestor R^2 sa nazýva fázový priestor systému (7).

Riešením dynamického systému (7) prechádzajúcim cez bod $(\tau, x) \in R \times R^n$ sa nazýva diferencovateľné zobrazenie $\varphi: I \rightarrow R^2$ intervalu $I = (a, b)$ (a môže byť aj

$-\infty$ a $b + \infty$), ak pre ľubovoľné $s \in I$ platí: $\frac{d}{dt} \varphi(t) \Big|_{t=s} = f(\varphi(s))$ a $\varphi(\tau) = x$. Ak

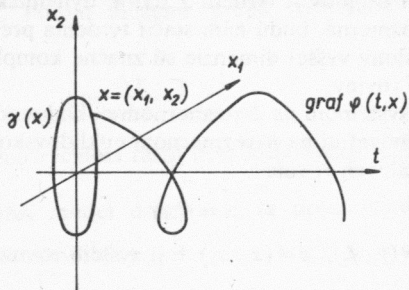
$f \in C^1$ a ak $f(x)$ spĺňa tzv. podmienky predĺžiteľnosti riešení, napríklad $|f(x)| \leq K + L|x|$ pre všetky $x \in R^2$, kde K, L sú kladné konštanty, potom pre každý bod $x \in R^2$ existuje jediné riešenie $\varphi(t)$ systému (7), definované na intervale $(-\infty, \infty)$ také, že $\varphi(0) = x$. Všeobecnejšie podmienky predĺžiteľnosti riešení možno nájsť napríklad v [4, Hlava III, §2]. V ďalších úvahách budeme predpokladať, že riešenie systému (7) existuje na intervale $(-\infty, \infty)$. Aby sme zvýraznili závislosť riešenia $\varphi(t)$ aj od počiatočnej podmienky x , budeme písať $\varphi(t) = \varphi(t, x)$.

Zobrazenie $\varphi: R \times R^2 \rightarrow R^2$, $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x)$ sa nazýva tok dynamického systému (7). Nech $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x))$. Pre $x \in R^2$, $y_1 = \varphi_1(t, x)$, $y_2 = \varphi_2(t, x)$ je parametricky zadaná krivka v R^2 s parametrom $t \in (-\infty, \infty)$ (prípadne bod x , ak $f(x) = 0$). Túto krivku nazývame trajektóriou systému (7) prechádzajúcou cez bod x a budeme ju označovať $\gamma(x)$.

Príklad. $\dot{x} = Ax$, kde $x = (x_1, x_2)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, t. j. systém má tvar

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

Nech $\bar{x} = (z, 0)$. Riešením systému prechádzajúcim cez bod $(0, \bar{x}) \in R \times R^2$ je zobrazenie $\varphi(t, \bar{x}) = (z \cos t, -z \sin t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Trajektória prechádzajúca cez bod \bar{x} je parametricky zadaná krivka $y_1 = z \cos t$, $y_2 = -z \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$, čo je množina $\gamma(\bar{x}) = \{(z \cos t, -z \sin t) \mid t \in (-\infty, \infty)\} = \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = z^2\}$, a to je kružnica v R^2 . Pre názornosť si nakreslíme graf riešenia $\varphi(t, \bar{x})$ a trajektóriu $\gamma(\bar{x})$ do jedného obrázku (obr. 1).



Obr. 1

Graf riešenia $\varphi(t, \bar{x})$ leží na povrchu valca polomeru $|z|$ a trajektória $\gamma(\bar{x})$ je vlastne projekcia grafu riešenia $\varphi(t, \bar{x})$ do fázového priestoru R^2 .

Trajektória $\gamma(x)$ sa nazýva uzavretá s periódou T , ak riešenie $\varphi(t, x)$ je nekonštantné a periodické s najmenšou periódou T , t. j. ak $\gamma(x)$ je projekciou nekonštantného periodického riešenia s najmenšou periódou T . Napríklad trajektória $\gamma(\bar{x})$ z nášho príkladu je uzavretá trajektória s periódou $T = 2\pi$.

Bod x sa nazýva kritický (stacionárny), ak riešenie $\varphi(t, x)$ prechádzajúce cez bod $(0, x)$ je konštantné. Ak $f \in C^1$, potom každým bodom $(0, x) \in R \times R^2$ prechádza práve jedno riešenie systému (7), a preto bod $x \in R^2$ je kritický práve vtedy, ak $f(x) = 0$.

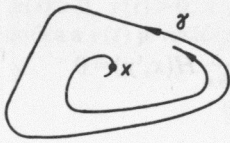
Štruktúra trajektórií nám dáva dostatočné informácie o správaní sa systému. Najpodstatnejší je obraz trajektórií v okolí kritických bodov a v okolí uzavretých trajektórií.

Bod $y \in R^2$ sa nazýva ω -limitným bodom bodu x , ak existuje postupnosť $t_n \rightarrow \infty$ taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = y$. Množina všetkých ω -limitných bodov bodu x sa nazýva ω -limitná množina bodu x a značíme ju $L_\omega(x)$. Analogicky sa definuje α -limitná množina $L_\alpha(x)$ bodu x s tým rozdielom, že $t_n \rightarrow -\infty$.

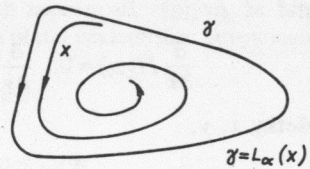
Príklady (obr. 2 a 3):

Limitný cyklus je uzavretá trajektória $\gamma \subset L_\omega(x)$ alebo $\gamma \subset L_\alpha(x)$ pre nejaké $x \in \gamma$. Ak $\gamma \subset L_\omega(x)$, potom sa nazýva ω -limitný a ak $\gamma \subset L_\alpha(x)$, tak α -limitný cyklus.

Prvým integrálom C^1 dynamického systému ($f \in C^1$) (7) sa nazýva funkcia



Obr. 2



Obr. 3

$H: R^2 \rightarrow R$ taká, že je konštantná pozdĺž riešení systému (7), t. j. $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \frac{\partial}{\partial x} H(x(t), y(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial}{\partial y} H(x(t), y(t))\dot{y}(t) \equiv \text{konštanta}$ pre každé riešenie $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ systému (7).

Tvrdenie 1. ([1, kap. 11, §5, Veta 3.])

Nech H je prvý integrál rovinného C^1 dynamického systému (7). Ak H nie je konštantná funkcia na nejakej otvorenej množine, potom systém (7) nemá limitný cyklus.

Hľadáme teraz prvý integrál systému (6) v tvare $H(x, y) = F(x) + G(y)$

$$\frac{d}{dt} H(x, y) = x \frac{dF(x, y)}{dx} (A - By) + y \frac{dG(x, y)}{dy} (Cx - D)$$

Treba, aby $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) \equiv 0$, t. j. aby

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{Cx - D} \equiv \frac{y \frac{dG}{dy}}{By - A}$$

Pretože na ľavej strane rovnosti je funkcia premennej x a na pravej strane je funkcia premennej y , tak sú tie funkcie konštantné. Preto pre F a G dostávame nasledujúce rovnice

$$\frac{dF}{dx} = C - \frac{D}{x}$$

$$\frac{dG}{dy} = B - \frac{A}{y}$$

Integrovaním dostávame funkciu $H(x, y) = Cx - D \cdot \log x + By - A \cdot \log y$, definovanú pre $x > 0, y > 0$, ktorá je prvým integrálom systému (6).

Kritické body systému (6) dostaneme riešením rovníc $(A - By)x = 0$, $(Cx - D)y = 0$. Tento systém má riešenie $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = \left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$.

Platí:

$$\frac{\partial}{\partial x} H(z_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} H(z_2) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} H(x, y) = 0$$

pre všetky x, y ,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(z_2) > 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} H(z_2) > 0,$$

a preto má funkcia $H(x, y)$ lokálne minimum v bode z_2 . Zo znamienok funkcií

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} (x, y)$$

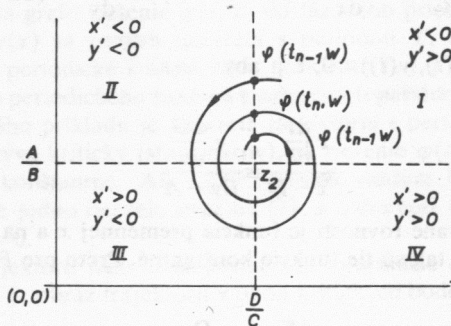
možno usúdiť, že funkcia $H(x, y)$ má v bode z_2 absolútne minimum.

Teraz dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 2. ([1, kap. 12, §2, Veta 1.])

Každá trajektória systému (6) je uzavretá s výnimkou bodu z_2 a súradných osí.

Dôkaz. Priamky $y = \frac{A}{B}$, $x = \frac{D}{C}$ rozdeľujú oblasť $x > 0, y > 0$ na štyri časti (kvadranty). Označme oblasť $x > \frac{D}{C}, y > \frac{A}{B}$ I. kvadrant, $x < \frac{D}{C}, y > \frac{A}{B}$ II. kvadrant atď. (pozri obr. 4). Nech riešenie $\varphi(t, x) = (x(t), y(t))$ vychádza z I. kvadrantu,



Obr. 4

t. j. $x(0) = u > \frac{D}{C} > 0, y(0) = v > \frac{A}{B} > 0$. Existuje maximálny interval $[0, \tau) = J$

taký, že $\varphi(t, x)$ je v I. kvadrante pre $0 \leq t < \tau$ (τ môže byť aj $+\infty$). Položme $A - Bv = -r < 0, Cu - D = s > 0$. $\frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = A - By(t) \leq -r,$

$$\frac{d}{dt} \log y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = Cx(t) - D \geq s.$$

Pretože $x(t) > 0$, $y(t) > 0$, z predchádzajúcich nerovností vyplýva, že funkcia $x(t)$ je klesajúca a $y(t)$ je rastúca na intervale J a platia nasledujúce nerovnosti

$$\frac{D}{C} \leq x(t) \leq ue^{-t} \leq u$$

$$\frac{A}{B} \geq y(t) \geq ve^t \quad \text{pre } 0 \leq t < \tau$$

Z prvej nerovnosti vyplýva, že τ je konečné a je zrejmé, že pre $t \in J$ je $(x(t), y(t))$ v kompaktnej oblasti definovanej nerovnosťami $\frac{D}{C} \leq x \leq u$, $\frac{A}{B} \geq y \geq v$.

Preto podľa [1, Veta, kap. 8, §5] $(x(\tau), y(\tau))$ je definované a leží na hranici uvedenej kompaktnej oblasti. Pretože $x(t)$ je klesajúca funkcia, tak $x(\tau) = \frac{D}{C}$.

Preto trajektória vchádza do II. kvadrantu. Analogicky sa dá ukázať, že trajektória prechádza všetkými štyrmi kvadrantmi.

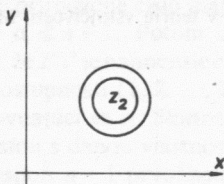
Nech $w = (u, v)$, $u > 0$, $v > 0$, $w \neq z_2$. Potom z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že existujú postupnosti $t_n \rightarrow \infty$, $s_n \rightarrow -\infty$ také, že $\varphi(t_n, w)$ a $\varphi(s_n, w)$ ležia na priamke $x = \frac{D}{C}$. Ak w neleží na uzavretej trajektórii, potom postupnosti bodov

$\varphi(t_n, w)$ a $\varphi(s_n, w)$ sú monotónne rozložené na priamke $x = \frac{D}{C}$, t. j. pre každé n ,

bod $\varphi(t_n, w)$ leží medzi bodmi $\varphi(t_{n-1}, w)$ a $\varphi(t_{n+1}, w)$ a podobne pre $\varphi(s_n, w)$ (pozri obr. 4). Pretože každým bodom oblasti $x > 0$, $y > 0$ prechádza práve jedna trajektória systému (6) a systém (6) nemá podľa vety 1 limitný cyklus, tak

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, w) = z_2$ a $\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(s_n, w) = z_2$. Pretože funkcia $h(x, y)$ je konštantná pozdĺž trajektórií systému (6), tak $H(w) = H(z_2)$. To je však spor s tým, že funkcia $H(x, y)$ má v bode z_2 absolútne minimum. Tým je veta 2 dokázaná.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že trajektórie systému (6) majú nasledujúci obraz (pozri obr. 5).



Obr. 5

Uzáver predchádzajúcich úvah je teda takýto: Pre danú počiatočnú hodnotu dravca $y(0)$ a koristi $x(0)$, $x(0) \neq 0$, $y(0) \neq 0$, $(x(0), y(0)) \neq z_2$ populácie dravec—korisť oscilujú.

Úlohu možno, samozrejme, zovšeobecniť. Možno napríklad popísať vzťah dravec—korisť nasledovnými rovnicami

$$\dot{x} = M(x, y)x$$

$$\dot{y} = N(x, y)y$$

kde M, N sú C^1 funkcie, nezáporné a také, že $\frac{\partial M}{\partial y} < 0, \frac{\partial N}{\partial x} < 0$. Analýzu takejto úlohy však už robiť nebudeme.

Na záver by som chcel upozorniť na jednu vec. Žijeme v dobe búrlivého rozvoja výpočtovej techniky, a tak sa nám často zdá, že sme povinní kúpiť počítaacie stroje algoritmiami a teórie bez algoritmov akoby boli len zbytočným prepychom a ozdobou školských učebníc. Musíme si však uvedomiť, že cesta k numerickým algoritmom a k programom pre počítaacie stroje je veľmi komplikovaná. Niekedy sme dokonca nútení obmedziť sa len na hrubú analýzu problému, aby sme mali vôbec akúsi predstavu o skúmanom jave. Aj takéto hrubé analýzy však môžu mať veľkú cenu pre prax. Dávajú nám často dosť bohaté informácie o správaní sa modelu, a teda aj informácie o skúmanom jave. Máme potom možnosť predvídať budúci priebeh skúmaného javu, prípadne vieme, ako do neho zasiahnuť v náš prospech. Naše príklady sú síce pomerne jednoduché, no napríklad už aj analýza Volterrovho—Lotkovho systému môže mať praktický význam pri chove dvoch druhov rýb v nejakom rybníku, kde máme možnosť nasadiť vhodné dva druhy rýb. Aj keď nebudeme vedieť presne počty jedincov nasadených druhov rýb v každom čase, tak môžeme mať aspoň istotu, že obidva druhy rýb žijú v akejsi rovnováhe.

Literatúra

- [1] Hirsch, M. W.—Smale, S.: Differential equations. Dynamical systems and linear algebra. Academic Press, New York 1974.
- [2] Rescigno, A.—Richardson, I.: The struggle for life I. Two species. Bull. Math. Biophysics, 24, 1967, 377—388.
- [3] Montroll, E. W.: On the Volterra and other nonlinear models. Rev. Mod. Phys. 43, 1971.
- [4] Barbašin, E. A.: Vvedenie v teoriú vstojčivosti. Moskva 1967.