GRUPY ROVINNÝCH TRANSFORMÁCIÍ I

JÁN ČIŽMÁR, Bratislava

V učive stredných škôl sa v súčasnosti pojem grupy zhodných zobrazení ani pojem grupy podobných zobrazení explicitne nevyskytuje. Ani podľa pripravovaných nových osnov sa exaktná algebrizácia tohto učiva a zvýraznenie jeho grupovej štruktúry nepredpokladá. Napriek tomu výučba týchto častí geometrie na patričnej odbornej úrovni vyžaduje od vyučujúcich spoľahlivú orientáciu v štruktúre grúp transformácií a istotu v prehľade o ich základných vzťahoch. Nasledujúci článok je pokusom ukázať štruktúru a vzťahy istých grúp rovinných transformácií a načrtnúť postup, ktorým sa bežne známe grupy transformácií nenásilným spôsobom získajú ako podgrupy „prirodzenej" grupy projektívnej roviny. Hlavným cieľom tohto článku je pomôcť tým učiteľom stredných škôl, ktorí doteraz nemali možnosť oboznámiť sa z dostupných prameňov s uvedeným prístupom a ktorí oň majú záujem.

U čitateľa sa predpokladajú základné znalosti z lineárnej algebry a z teórie algebrických rovníc a znalosť pojmu projektívnej roviny nad poľom ([1], [2]).

1. Transformácia sústavy súradníc v projektívnej rovine

Nech $P^2 = P^2(k)$ je projektívna rovina nad poľom k charakteristiky 0 ([1]). Na základe známeho vzťahu roviny P^2 k trojrozmernému vektorovému priestoru $V^3(k)$ ([1]) možno každý bod $[x]$ roviny P^2 vyjadriť ako lineárnu kombináciu všetkých bodov istej maximálnej skupiny lineárne nezávislých bodov. Takú skupinu tvoria napr. body $O_0 = [1; 0; 0]$, $O_1 = [0; 1; 0]$ a $O_2 = [0; 0; 1]$. Súradnice $(x_0; x_1; x_2)$ nejakého reprezentanta bodu $[x]$ sú koeficientmi lineárnej kombinácie

$$x_0 \cdot (1; 0; 0) + x_1 \cdot (0; 1; 0) + x_2 \cdot (0; 0; 1) \tag{1}$$

bodov O_0, O_1, O_2, vyjadrujúcej pomocou reprezentantov $(1; 0; 0)$,

$(0;1;0)$, $(0;0;1)$ tohto reprezentanta bodu $[x]$. Vyjadrenie (1) neurčuje triedu $[x]$ jednoznačne, pretože po zvolení iných reprezentantov $(\varrho_0;0;0)$, $(0;\varrho_1;0)$, $(0;0;\varrho_2)$ $(\varrho_0\neq 0, \varrho_1\neq 0, \varrho_2\neq 0)$ bodov O_0, O_1, O_2, v ktorých napr. $\varrho_0\neq\varrho_1$, lineárna kombinácia

$$x_0\cdot(\varrho_0;0;0)+x_1\cdot(0;\varrho_1;0)+x_2\cdot(0;0;\varrho_2) \tag{1'}$$

dáva trojicu $(\varrho_0x_0;\ \varrho_1x_1;\ \varrho_2x_2)$, ktorá nie je ekvivalentná s trojicou $(x_0;x_1;x_2)$, a teda nie je reprezentantom bodu $[x]$. Na odstránenie tohto defektu je nevyhnutné a stačí, aby sa pre každé vyjadrenie tvaru (1′) brali pevné reprezentanty bodov O_0, O_1, O_2, čo sa dosiahne napr. požiadavkou, aby ľubovoľný bod $[z]$, ktorého reprezentant $(z_0;z_1;z_2)$ má všetky súradnice rôzne od nuly, bol lineárnou kombináciou bodov O_0, O_1, O_2 s koeficientmi $1;1;1$, t. j.

$$(z_0;z_1;z_2)=1\cdot(\varrho_0;0;0)+1\cdot(0;\varrho_1;0)+1\cdot(0;0;\varrho_2) \tag{2}$$

Potom $\varrho_0=z_0$, $\varrho_1=z_1$, $\varrho_2=z_2$ a všetky prípustné reprezentanty bodov O_0, O_1, O_2 majú tvar $(\varrho\varrho_0;0;0)$, $(0;\varrho\varrho_1;0)$, $(0;0;\varrho\varrho_2)$, kde $\varrho\in k$ a $\varrho\neq 0$. Koeficienty lineárnej kombinácie vyjadrujúcej bod $[z]$ budú patriť stále k triede reprezentovanej trojicou $(1;1;1)$ a aj trieda koeficientov pre vyjadrenie bodu $[x]$ ako lineárnej kombinácie bodov O_0, O_1, O_2 bude určená jednoznačne. Body O_0, O_1, O_2 sa nazývajú *vrcholy sústavy súradníc* v P^2, bod J reprezentovaný trojicou $(1;1;1)$ sa nazýva *jednotkový bod sústavy súradníc* v P^2, priamky $o_i=O_jO_k$ $(i,j,k=0,1,2;\ i\neq j\neq k\neq i)$ sa nazývajú *osi sústavy súradníc*. Zadaním uvedenej štvorice bodov sú jednoznačne určené triedy navzájom ekvivalentných trojíc koeficientov lineárnych kombinácií vyjadrujúcich všetky body roviny P^2 pomocou vrcholov sústavy súradníc. Reprezentanty takýchto tried sa nazývajú *homogénne súradnice bodov vzhľadom na sústavu súradníc* $\mathcal{S}\equiv(O_0, O_1, O_2; J)$.

Voľba inej štvorice bodov O_0', O_1', O_2', J' s reprezentantmi $(y_0^{(0)};y_1^{(0)};y_2^{(0)})$, $(y_0^{(1)};y_1^{(1)};y_2^{(1)})$, $(y_0^{(2)};y_1^{(2)};y_2^{(2)})$, $(u_0;u_1;u_2)$, pričom v tejto štvorici bodov sú každé tri body lineárne nezávislé a všetky $u_i\neq 0$ $(i=0,1,2)$, slúži analogicky ako sústava $\mathcal{S}$ na vyjadrenie reprezentanta $(x_0;\ x_1;\ x_2)$ každého bodu $[x]$ v tvare lineárnej kombinácie

$$\begin{aligned}(x_0;x_1;x_2)=x_0'\cdot(y_0^{(0)};y_1^{(0)};y_2^{(0)})+x_1'\cdot(y_0^{(1)};y_1^{(1)};y_2^{(1)})+\\+x_2'\cdot(y_0^{(2)};y_1^{(2)};y_2^{(2)}).\end{aligned} \tag{3}$$

Pri výbere pevných reprezentantov bodov $[y^{(0)}]$, $[y^{(1)}]$ a $[y^{(2)}]$, ktorým sa zaručuje jednoznačnosť triedy koeficientov lineárnej kombinácie vyjadrujúcej ľubovoľný bod pomocou bodov O'_0, O'_1, O'_2, sú súradnice bodu $[x]$ vzhľadom na sústavu súradníc $\mathscr{S}$ so súradnicami toho istého bodu vzhľadom na sústavu súradníc $\mathscr{S}' \equiv (O'_0, O'_1, O'_2; J')$ viazané vzťahmi

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0^{(0)} \cdot x'_0 + y_0^{(1)} \cdot x'_1 + y_0^{(2)} \cdot x'_2 \\ x_1 &= y_1^{(0)} \cdot x'_0 + y_1^{(1)} \cdot x'_1 + y_1^{(2)} \cdot x'_2 \\ x_2 &= y_2^{(0)} \cdot x'_0 + y_2^{(1)} \cdot x'_1 + y_2^{(2)} \cdot x'_2, \end{aligned} \tag{3'}$$

pričom trojicu $(x_0; x_1; x_2)$ i trojicu $(x'_0; x'_1; x'_2)$ možno nahradiť ľubovoľnou ekvivalentnou trojicou. Body O'_0, O'_1, O'_2 sú lineárne nezávislé, preto determinant $|\mathbf{Y}|$ matice $\mathbf{Y} = [y_i^{(j)}]$ $(i, j = 0, 1, 2)$ sa nerovná nule a zo vzťahov (3′) možno vyjadriť x'_i $(i = 0, 1, 2)$ v tvare

$$x'_i = \sum_{j=0}^{2} Y_j^{(i)} \cdot x_j, \qquad i = 0, 1, 2; \tag{3''}$$

$Y_j^{(i)}$ je označenie algebrického doplnku prvku $y_j^{(i)}$ v determinante $|\mathbf{Y}|$. (Vo vzťahoch (3″) sa vynechalo delenie každého koeficienta $Y_j^{(i)}$ hodnotou $|\mathbf{Y}|$, čo je vzhľadom na homogénnosť súradníc x_j a x'_i prípustné.)

Sústavy (3′) a (3″) vyjadrujú závislosti súradníc toho istého bodu vzhľadom na sústavy súradníc $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$. Vzťahy (3′) alebo (3″) vyjadrujú tzv. *transformáciu sústavy súradníc $\mathscr{S}$ do sústavy súradníc $\mathscr{S}'$* alebo *prechod od sústavy súradníc $\mathscr{S}$ k sústave súradníc $\mathscr{S}'$*.

Často je vhodnejšie používať maticový zápis transformácie sústavy súradníc. Jeho všeobecný tvar je

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \tag{4}$$

alebo

$$\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{x} \tag{4'}$$

kde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je regulárna matica 3. stupňa nad k, $\tilde{\mathbf{A}}^T$ je matica algebrických doplnkov prvkov matice transponovanej vzhľadom na $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

sú zápisy trojíc súradníc bodov v tvare jednostĺpcových matíc.

2. Kolineácie v projektívnej rovine

2.1 Definícia kolineácie

Nech je daná v projektívnej rovine $P^2(k)$ pevná sústava súradníc $\mathcal{S}$ a nech súradnice ľubovoľného bodu roviny sú vyjadrené vzhľadom na túto sústavu.

Definícia 1. Kolineáciou projektívnej roviny P^2 sa nazýva zobrazenie $\varphi: P^2 \to P^2$, ktoré bodu $[x] \in P^2$ s reprezentantom $(x_0; x_1; x_2)$ priraďuje bod $[x'] \in P^2$ s reprezentantom $(x'_0; x'_1; x'_2)$, kde

$$x'_i = \sum_{j=0}^{2} b_{ij} x_j, \qquad i = 0, 1, 2; \quad b_{ij} \in k \tag{5}$$

a $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ je regulárna matica 3. stupňa.

Poznámka 1. Ako rovnocenný termín sa používa aj názov *kolineácia v projektívnej rovine.*

V niektorých prameňoch sa termín kolineácia zavádza všeobecnejšie. Na označenie kolineácie v zmysle definície 1 sa potom používa názov *projektívna kolineácia* alebo *projektívna transformácia.*

Poznámka 2. V zápise pomocou matíc má kolineácia (5) tvar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x} \tag{5'}$$

v ktorom význam označení $\mathbf{B}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ je zrejmý.

Tú istú kolineáciu vyjadruje aj zápis

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}' \tag{5''}$$

ktorý je vzhľadom na homogénnosť súradníc bodov rovnocenný so zápisom

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{x}' \tag{5'''}$$

($\mathbf{B}^{-1}$ je matica inverzná k $\mathbf{B}$, význam označenia $\tilde{\mathbf{B}}^T$ je zrejmý z vysvetlenia vzťahov (4')).

Poznámka 3. Transformácia sústavy súradníc (vzťahy (4) a (4')) a kolineácia (vzťahy (5''), (5''')) majú formálne zhodné algebrické vyjadrenie. Dôležité je uvedomiť si, že pri transformácii sústavy súradníc ide o vzťah súradníc jedného bodu vzhľadom na dve sústavy súradníc a pri kolineácii o vzťah súradníc dvoch bodov (ktorých stotožnenie sa nevylučuje), pričom súradnice oboch týchto bodov sú určené vzhľadom na tú istú sústavu súradníc.

Poznámka 4. Pri voľbe reprezentanta $(\varrho x_0; \varrho x_1; \varrho x_2)$ $(\varrho \in k, \varrho \neq 0)$ bodu $[x]$ zápis (5′) nadobúda tvar

$$\mathbf{x}' = \varrho \mathbf{B} \mathbf{x}$$

kde $\varrho \mathbf{B}$ je násobok matice $\mathbf{B}$ prvkom ϱ. Z násobenia matíc je známe, že $\varrho \mathbf{B} = (\varrho \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\varrho \mathbf{I})$, kde

$$\varrho \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{bmatrix}$$

je diagonálna matica, pričom

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jednotková matica 3. stupňa.

Pri voľbe pevného reprezentanta $(x_0; x_1; x_2)$ bodu $[x]$ vzťah (5), v ktorom sa matica $\mathbf{B}$ nahradí maticou $\varrho \mathbf{B}(\varrho \neq 0)$, priradí bodu $[x]$ bod s reprezentantom $(\varrho x_0'; \varrho x_1'; \varrho x_2')$, teda opäť bod $[x']$.

Teda všetky matice $\varrho \mathbf{B}(\varrho \neq 0)$ určujú tú istú kolineáciu ako matica $\mathbf{B}$.

Cvičenia

1. Ukážte, že regulárna matica 3. stupňa $\mathbf{D}$ nepatriaca do triedy $\{\varrho \mathbf{B}\}$ nenulových násobkov regulárnej matice $\mathbf{B}$ 3. stupňa určuje kolineáciu rôznu od kolineácie určenej maticou $\mathbf{B}$.

2. Aké dôsledky má výsledok cvičenia 1 pre vzťah množiny všetkých kolineácií roviny $P^2(k)$ a množiny všetkých regulárnych matíc 3. stupňa nad poľom k?

2.2 Základné vlastnosti kolineácie

Veta 1. Každá kolineácia projektívnej roviny P^2 má tieto vlastnosti:

1. Je bijektívnym zobrazením množiny všetkých bodov roviny na seba.

2. Zachováva lineárnu závislosť a lineárnu nezávislosť bodov; špeciálne zachováva počet lineárne nezávislých bodov v skupine.

3. Je bijektívnym zobrazením množiny všetkých priamok roviny na seba.

Dôkaz. 1. Ak je kolineácia určená vzťahom (5′), v ktorom $\mathbf{x}$ je jednostĺpcová matica trojice súradníc vzoru $[x]$ a $\mathbf{x}'$ jednostĺpcová matica trojice súradníc obrazu $[x']$ bodu $[x]$, jednoznačnosť priradenia $(x_0; x_1; x_2) \mapsto (x_0'; x_1'; x_2')$ je zrejmá a v dôsledku regulárnosti matice $\mathbf{B}$ je $[x_0'; x_1'; x_2') \neq (0; 0; 0)$, teda $[x']$ je bod (a nie prázdna podmnožina v P^2).

Analogicky jednoznačnosť priradenia vzoru $[x]$ ku každému bodu $[x'] \in P^2$ v zobrazení φ je zrejmá zo vzťahov (5″) alebo (5‴).

2. Ak súradnice $(x_0^{(i)}; x_1^{(i)}; x_2^{(i)})$ reprezentantov daných bodov $[x^{(i)}]$ $(i = 1, \ldots, r)$ napíšeme ako stĺpce matice $\mathbf{X}$ typu $3 \times r$, súradnice reprezentantov obrazov týchto bodov sú stĺpce matice $\mathbf{BX}$ typu $3 \times r$. Pretože matica $\mathbf{B}$ je regulárna, majú matice $\mathbf{X}$ a $\mathbf{BX}$ tú istú (stĺpcovú) hodnosť ([2], s. 336), čo znamená, že v skupine bodov $[x^{(i)}]$ a v skupine ich obrazov je ten istý počet lineárne nezávislých bodov. To špeciálne znamená aj prenos vlastnosti lineárnej závislosti alebo nezávislosti bodov $[x^{(i)}]$ na skupinu ich obrazov.

3. Nech je priamka l určená dvoma lineárne nezávislými bodmi $[c]$ a $[d]$ s pevnými reprezentantmi $(c_0; c_1; c_2)$ a $(d_0; d_1; d_2)$. Parametrické vyjadrenie priamky l má tvar ([1])

$$(x) = t_1(c) + t_2(d), \quad (t_1, t_2) \in k^2 - (0; 0), \tag{6}$$

čo pre súradnice znamená

$$x_i = t_1 c_i + t_2 d_i, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{6′}$$

Obrazom množiny všetkých bodov $[x]$ priamky l v kolineácii φ je množina všetkých bodov $[x']$, ktorých súradnice sú

$$x_i' = \sum_{j=0}^{2} b_{ij} x_j = \sum_{j=0}^{2} b_{ij}(t_1 c_j + t_2 d_j) =$$

$$= t_1 \cdot \sum_{j=0}^{2} b_{ij} c_j + t_2 \cdot \sum_{j=0}^{2} b_{ij} d_j = t_1 c_i' + t_2 d_i', \qquad i = 0, 1, 2; \tag{7}$$

$(c_0'; c_1'; c_2')$, resp. $(d_0'; d_1'; d_2')$ sú reprezentanty obrazov $[c']$, resp. $[d']$ bodov $[c]$, resp. $[d]$.

Rovnice (7) vyjadrujú skutočnosť, že obrazom množiny všetkých bodov priamky l je množina všetkých bodov priamky l', určenej obrazmi dvoch lineárne nezávislých bodov priamky l. Stručne sa hovorí, že *priamka l' je obrazom priamky l v kolineácii φ.*

Dôkaz tvrdenia, že pre každú priamku roviny existuje ako vzor v kolineácii φ práve jedna priamka, je analogický.

Príklad 1. Obraz priamky v kolineácii

Sústava koeficientov $(u_0; u_1; u_2)$ v rovnici priamky l

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0 \tag{8}$$

má rovnaké vlastnosti ako sústava homogénnych súradníc bodu projektívnej roviny ([1], príklad 1). Preto sa pre trojicu $(u_0; u_1; u_2)$ zavádza názov *homogénne súradnice priamky l (priamkové súradnice)*. Množina všetkých bodov $[x']$ roviny, ktoré sú obrazmi všetkých bodov $[x]$ priamky l, vyhovuje rovnici (s využitím vzťahov (5'''))

$$u_0 \cdot \sum_{j=0}^{2} B_{j0}x'_j + u_1 \cdot \sum_{j=0}^{2} B_{j1}x'_j + u_2 \cdot \sum_{j=0}^{2} B_{j2}x'_j = 0, \tag{8'}$$

v ktorej B_{ji} označujú algebrické doplnky prvkov b_{ji} v determinante $|\mathbf{B}| = |b_{ij}|$. Rovnicu možno prepísať na tvar

$$\left(\sum_{i=0}^{2} B_{0i}u_i\right)x'_0 + \left(\sum_{i=0}^{2} B_{1i}u_i\right)x'_1 + \left(\sum_{i=0}^{2} B_{2i}u_i\right)x'_2 = 0 \tag{8''}$$

čo je rovnica priamky s priamkovými súradnicami

$$u'_i = \sum_{j=0}^{2} B_{ij}u_j, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{8'''}$$

Teda ak v kolineácii súradnice bodu a jeho obrazu súvisia vzťahmi (5') (ekvivalentne vzťahmi (5''')), súvisia priamkové súradnice priamky so súradnicami jej obrazu vzťahmi

$$\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \tag{8*}$$

a ekvivalentne vzťahmi

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^T\mathbf{u}' \tag{8**}$$

kde $\tilde{\mathbf{B}} = [B_{ij}]$ je matica algebrických doplnkov prvkov b_{ij} v determinante $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T$ je matica transponovaná k matici $\mathbf{B}$ a $\mathbf{u} = [u_0; u_1; u_2]^T$.

Ktorýmkoľvek zo vzťahov (5′), (5‴), (8*), (8**) je kolineácia jednoznačne určená.

2.3 Dvojpomer

V časti 3 dôkazu vety 1 sa zistilo, že zúženie kolineácie na priamku l je tiež bijektívne zobrazenie sústavy všetkých bodov priamky l na sústavu všetkých bodov obrazu priamky, ktoré bodu s parametrami (t_1, t_2) vzhľadom na lineárne nezávislé body $[c]$, $[d]$ priraďuje bod s parametrami (t_1, t_2) vzhľadom na obrazy bodov $[c]$, $[d]$. Takéto zobrazenie sa nazýva *projektívnym zobrazením* sústavy bodov na priamke l.

Parametrické vyjadrenie priamky umožňuje zaviesť pre usporiadanú štvoricu bodov priamky tzv. dvojpomer.

Definícia 2. Dvojpomerom usporiadanej štvorice po dvojiciach navzájom rôznych bodov $[r]$, $[s]$, $[t]$, $[v]$ priamky l, ktorých parametre vzhľadom na pevnú dvojicu bodov $[c]$, $[d]$ priamky l s pevnými reprezentantmi $(c_0; c_1; c_2)$, $(d_0; d_1; d_2)$ sú postupne $(r_1; r_2)$, $(s_1; s_2)$, $(t_1; t_2)$, $(v_1; v_2)$, sa nazýva podiel

$$\frac{\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Dvojpomer uvedenej štvorice označujeme $(rstv)$ alebo (r, s, t, v) alebo $(r, s; t, v)$.

Cvičenia

3. Ukážte, že nevyhnutné a dostačujúce pre to, aby ku každému bodu $[x]$ priamky $[c]$ $[d]$ bola vzhľadom na body $[c]$, $[d]$ priradená jediná trieda $[x_1; x_2]$ parametrov, je splnenie tejto podmienky: ľubovoľný pevný bod $[j]$ priamky rôzny od bodov $[c]$, $[d]$ má vzhľadom na tieto body jednoznačne určenú triedu parametrov $[j_1; j_2]$, $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$.

Ukážte, že splnenie tejto podmienky je ekvivalentné s výberom pevných reprezentantov bodov $[c]$, $[d]$.

4. Preskúmajte, ako možno zoslabiť podmienky na štvoricu bodov v definícii dvojpomeru, aby dvojpomer zostal definovaný.

5. Dokážte, že dvojpomer danej štvorice bodov nezávisí od dvojice

pevných bodov, vzhľadom na ktorú sa sústava bodov priamky parametrizuje.

6. Aké zmeny usporiadania možno urobiť v danej štvorici bodov bez zmeny dvojpomeru tejto štvorice?

Poznámka 5. Ak sa dvojpomer štvorice bodov rovná -1, nazýva sa štvorica bodov *harmonická*. Aj dvojpomer sa v tomto prípade nazýva *harmonický*.

Z časti 3 dôkazu vety 1 a z vlastností projektívneho zobrazenia vyplýva nasledujúca veta.

Veta 2. Každá kolineácia zachováva dvojpomer usporiadanej štvorice bodov priamky, t. j. dvojpomer usporiadanej štvorice bodov priamky sa rovná dvojpomeru ich obrazov vzatých v rovnakom poradí.

2.4 Vyjadrenie kolineácie po transformácii sústavy súradníc

Niekedy sa vyjadrenie kolineácie výhodne upraví vhodnou voľbou sústavy súradníc. Ak vyjadrenie kolineácie má tvar (5′) a transformácia sústavy súradníc má tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \tag{10}$$

kde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ označuje súradnice bodu $[x]$ v pôvodnej sústave súradníc,

napísané v tvare jednostĺpcovej matice, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ súradnice bodu $[x]$

v novej sústave súradníc, $\mathbf{A}$ je regulárna matica 3. stupňa, $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, resp.

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} X_0' \\ X_1' \\ X_2' \end{bmatrix}$$

sú súradnice obrazu $[x']$ bodu $[x]$ v pôvodnej, resp. novej sústave súradníc, nadobudne vyjadrenie kolineácie v novej sústave súradníc tvar

$$\mathbf{A}\mathbf{X}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{11}$$

čiže

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}. \tag{11′}$$

Vzťahy (5′) a (11′) ukazujú, že dve vyjadrenia tej istej kolineácie v rôznych sústavách súradníc majú podobné matice.

2.5 Projektívna grupa

Nech súradnice všetkých bodov i všetky kolineácie sú vyjadrené vzhľadom na pevnú sústavu súradníc roviny P^2.

1. Každé dve kolineácie φ, ψ roviny ako bijektívne zobrazenia roviny na ňu samu spĺňajú podmienky zložiteľnosti (násobiteľnosti), teda existuje zobrazenie $\chi = \psi \circ \varphi \colon P^2 \to P^2$, nazývané súčin kolineácií φ a ψ. Toto zobrazenie je kolineácia. Ak totiž kolineácie φ a ψ majú vyjadrenia

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{D}\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{B}$ a $\mathbf{D}$ sú regulárne matice 3. stupňa, priraďuje zobrazenie χ ľubovoľnému bodu $[x]$ bod $[x'']$, ktorého súradnice sú určené vzťahmi

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{x} \tag{12}$$

s regulárnou maticou $\mathbf{DB}$, čo predstavuje opäť vyjadrenie kolineácie. Vzťah (12) zároveň ukazuje, že súčin $\psi \circ \varphi$ kolineácií je určený súčinom $\mathbf{DB}$ matíc $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, príslušných k jednotlivým činiteľom φ, ψ súčinu $\psi \circ \varphi$.

2. Asociatívnosť násobenia v množine všetkých kolineácií roviny P^2 je dôsledkom asociatívnosti skladania ľubovoľných (zložiteľných) zobrazení. Algebricky tejto asociatívnosti zodpovedá asociatívnosť násobenia regulárnych matíc 3. stupňa.

Vlastnosti 1 a 2 znamenajú, že množina všetkých kolineácií roviny P^2 vzhľadom na násobenie kolineácií (ako skladanie zobrazení) tvorí pologrupu.

3. Jednotkovým (neutrálnym) prvkom násobenia v pologrupe všetkých kolineácií je kolineácia

$$\mathbf{x}' = \mathbf{I}\mathbf{x}$$

Táto kolineácia sa nazýva *identickou kolineáciou* (identitou). Je identickým zobrazením roviny P^2.

4. Inverzným prvkom ku kolineácii (5′) v pologrupe všetkých kolineácií roviny je kolineácia

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}, \tag{13}$$

o čom sa možno priamo presvedčiť jej zložením s kolineáciou (5′).

Kolineácia (13) sa nazýva *inverznou kolineáciou* ku kolineácii (5′). Je zrejmé, že kolineáciou inverznou ku kolineácii (13) je kolineácia (5′).

Vlastnosti 1 až 4 množiny všetkých kolineácií roviny zhŕňa nasledujúca veta.

Veta 3. Množina všetkých kolineácií projektívnej roviny P^2 vzhľadom na operáciu násobenia je grupa.

Táto grupa sa nazýva *projektívna grupa* projektívnej roviny alebo *grupa kolineácií* projektívnej roviny alebo *grupa projektívnych transformácií* projektívnej roviny; obvykle sa označuje $\mathrm{PGL}(P^2(k))$ alebo $\mathrm{PGL}(2; k)$.

Štruktúra tejto grupy sa stane prehľadnejšou porovnaním so štruktúrou multiplikatívnej grupy všetkých regulárnych matíc 3. stupňa nad k, ktorú označme $\mathrm{GL}(3; k)$.

Každá regulárna matica 3. stupňa nad k určuje jednoznačne kolineáciu a ku každej kolineácii existuje regulárna matica, ktorou je kolineácia určená, teda existuje zobrazenie ε: $\mathrm{GL}(3; k) \to \mathrm{PGL}(2; k)$, ktoré je surjektívne. Podľa vlastnosti 1 je toto zobrazenie homomorfizmus grúp, teda ε je epimorfizmus. Podľa poznámky 4 a cvičenia 1 je každá kolineácia určená práve triedou matíc $\{\varrho\mathbf{I}\mathbf{B}\}$, kde $\mathbf{B}$ je regulárna matica 3. stupňa, $\mathbf{I}$ je jednotková matica 3. stupňa a ϱ je nenulový prvok poľa k. Množina $\{\varrho\mathbf{I}\}$ násobkov jednotkovej matice všetkými nenulovými prvkami ϱ poďa k je izomorfná s multiplikatívnou grupou k^* všetkých nenulových prvkov poľa k, a je teda sama grupou. Grupa týchto matíc je centrum grupy $\mathrm{GL}(3; k)$, t. j. je maximálnou podgrupou grupy $\mathrm{GL}(3; k)$ s vlastnosťou, že každý jej prvok komutuje s každým prvkom grupy $\mathrm{GL}(3; k)$. Označme toto centrum grupy $\mathrm{CGL}(3; k)$. Na základe uvedených faktov platí nasledujúca veta.

Veta 4. Projektívna grupa projektívnej roviny $P^2(k)$ je izomorfná s faktorovou grupou $\mathrm{GL}(3; k)/\mathrm{CGL}(3; k)$.

2.6 Samodružné body a samodružné priamky kolineácie. Charakteristická rovnica kolineácie

Definícia 3. Bod sa nazýva samodružným (pevným, invariantným) bodom kolineácie, ak je totožný so svojím obrazom v tejto kolineácii.

Zhodne sa definuje samodružnosť priamky aj ľubovoľnej inej rovinnej podmnožiny.

Ak je bod $[y]$ samodružným bodom kolineácie (5') a ako vzor má reprezentanta $(y_0; y_1; y_2)$, ako obraz má reprezentanta $(\varrho y_0; \varrho y_1; \varrho y_2)$ s nejakým $\varrho \in k$, $\varrho \neq 0$. Pre súradnice samodružného bodu $[y]$ teda platí

$$\varrho \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{14}$$

čo predstavuje sústavu homogénnych lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \varrho y_0 &= b_{00}y_0 + b_{01}y_1 + b_{02}y_2 \\ \varrho y_1 &= b_{10}y_0 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ \varrho y_2 &= b_{20}y_0 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 ; \end{aligned} \tag{14'}$$

po úprave

$$\begin{aligned} (b_{00}-\varrho)y_0 + b_{01}y_1 + b_{02}y_2 &= 0 \\ b_{10}y_0 + (b_{11}-\varrho)y_1 + b_{12}y_2 &= 0 \\ b_{20}y_0 + b_{21}y_1 + (b_{22}-\varrho)y_2 &= 0, \end{aligned} \tag{14''}$$

čo v maticovom zápise je

$$(\mathbf{B} - \varrho \mathbf{I})\mathbf{y} = 0. \tag{14'''}$$

Sústavu podmienok pre súradnice samodružnej priamky získame nasledujúcou úvahou. Ak obrazom priamky $[u]$ v kolineácii φ je priamka $[u']$, je obrazom priamky $[u']$ v inverznej kolineácii φ^{-1} priamka $[u]$. Ak je priamka $[u]$ samodružná v kolineácii φ, je aj samodružnou priamkou kolineácie φ^{-1} (ako priamka $[u']$) a jej súradnice spĺňajú vzťahy (8**). Pri výmene úloh priamok $[u]$, $[u']$ a výbere reprezentantov $(u_0; u_1; u_2)$ a $(\varrho u_0; \varrho u_1; \varrho u_2)$ $(\varrho \neq 0)$ majú tieto vzťahy tvar

$$\begin{aligned} \varrho u_0 &= b_{00}u_0 + b_{10}u_1 + b_{20}u_2 \\ \varrho u_1 &= b_{01}u_0 + b_{11}u_1 + b_{21}u_2 \\ \varrho u_2 &= b_{02}u_0 + b_{12}u_1 + b_{22}u_2, \end{aligned} \tag{15}$$

po úprave

$$\begin{aligned} (b_{00}-\varrho)u_0 + b_{10}u_1 + b_{20}u_2 &= 0 \\ b_{01}u_0 + (b_{11}-\varrho)u_1 + b_{21}u_2 &= 0 \\ b_{02}u_0 + b_{12}u_1 + (b_{22}-\varrho)u_2 &= 0, \end{aligned} \tag{15'}$$

v maticom tvare

$$(\mathbf{B}^T - \varrho \mathbf{I})\mathbf{u} = 0. \tag{15''}$$

Nevyhnutnou a dostačujúcou podmienkou existencie samodružného bodu, resp. samodružnej priamky, t. j. netriviálneho koreňa $(y_0; y_1; y_2)$, resp. $(u_0; u_1; u_2)$ sústavy lineárnych rovníc (14''), resp. (15') je anulovanie determinantu sústavy rovníc, t. j. splnenie podmienky

$$\mathbf{D}(\varrho) = |\mathbf{B} - \varrho\mathbf{I}| = |\mathbf{B}^T - \varrho\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} b_{00}-\varrho & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11}-\varrho & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22}-\varrho \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Výraz $\mathbf{D}(\varrho)$, v ktorom ϱ označuje neurčitú, sa nazýva *charakteristický determinant* kolineácie, rovnica $\mathbf{D}(\varrho)=0$, v ktorej ϱ označuje neznámu, sa nazýva *charakteristická rovnica* kolineácie. V teórii matíc sa rovnica (16) nazýva charakteristická rovnica matice $\mathbf{B}$, determinant $\mathbf{D}(\varrho)$ ako polynóm neurčitej ϱ sa nazýva *charakteristický polynóm* matice $\mathbf{B}$ a korene charakteristického polynómu sa nazývajú *charakteristické (vlastné) hodnoty* matice $\mathbf{B}$.

Charakteristický determinant v zostupnom usporiadaní podľa mocnín neurčitej ϱ po vynásobení činiteľom (-1) má tvar

$$\varrho^3 - (b_{00} + b_{11} + b_{22})\varrho^2 + (B_{00} + B_{11} + B_{22})\varrho - |\mathbf{B}|, \quad (17)$$

kde B_{ii} $(i=0, 1, 2)$ sú algebrické doplnky prvkov b_{ii} v determinante $|\mathbf{B}|$.

Z tohto tvaru, pretože $|\mathbf{B}| \neq 0$, je bezprostredne zrejmá nasledujúca vlastnosť.

1. Žiadny koreň charakteristickej rovnice sa nerovná nule.

Ďalej platí:

2. Korene charakteristickej rovnice kolineácie sú nezávislé od voľby sústavy súradníc.

Charakteristická rovnica po transformácii sústavy súradníc má totiž tvar

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} - \varrho\mathbf{I}| = 0. \quad (16')$$

Je však

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} - \varrho\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1}\varrho\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B} - \varrho\mathbf{I})\mathbf{A},$$

a teda charakteristická rovnica je

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} - \varrho\mathbf{I}| = |\mathbf{A}^{-1}|\ |\mathbf{B} - \varrho\mathbf{I}|\ |\mathbf{A}| = 0,$$

čo je ekvivalentné s rovnicou (16), pretože $|\mathbf{A}| \neq 0$ a $|\mathbf{A}^{-1}|\ |\mathbf{A}| = 1$.

Aby sa mohli skúmať vlastnosti kolineácie súvisiace s násobnosťou koreňov charakteristickej rovnice kolineácie, je potrebné zistiť tvar derivácií charakteristického determinantu.

$$\mathbf{D}'(\varrho) = -B_{00}(\varrho) - B_{11}(\varrho) - B_{22}(\varrho) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{2} B_{ii}(\varrho) = (-1)\cdot \mathbf{S}_2(\varrho), \tag{18}$$

kde $B_{ii}(\varrho)$ $(i=0, 1, 2)$ označuje algebrický doplnok prvku $(b_{ii}-\varrho)$ v determinante $\mathbf{D}(\varrho)$ a $\mathbf{S}_2(\varrho)$ je súčet všetkých hlavných subdeterminantov 2. stupňa v determinante $\mathbf{D}(\varrho)$. Ďalej

$$\mathbf{D}''(\varrho) = 2\cdot \sum_{i=0}^{2}(b_{ii}-\varrho) = (-1)^2\cdot 2!\cdot \mathbf{S}_1(\varrho) \tag{19}$$

kde $\mathbf{S}_1(\varrho)$ označuje súčet všetkých hlavných subdeterminantov stupňa 1 (t. j. diagonálnych prvkov) v determinante $\mathbf{D}(\varrho)$.

Maticu sústavy (14″) po dosadení koreňa α charakteristickej rovnice za ϱ označíme $\mathbf{D}(\alpha)$.

Literatúra

[1] Čižmár, J.: Algebraické krivky I, Matematické obzory 14/15, Bratislava 1980.
[2] MacLane, S.—Birkhoff, G.: Algebra. Alfa Bratislava 1973.