MATEMATICKÉ OBZORY 15/1980

METODICKÉ VARIÁCIE NA TÉMU PRAVDEPODOBNOSŤ II[1]

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

Existencia axiomatickej teórie pravdepodobnosti nás zbavuje pokušenia „definovať" pravdepodobnosť spôsobmi, ktoré si robia nárok na spojenie svojej bezprostrednej prírodovedeckej presvedčivosti so schopnosťou vybudovať na jej základe formálne prísne matematické teórie. Takejto definícii by v geometrii odpovedala približne „definícia" bodu ako toho, čo dostaneme, keď nekonečne veľakrát obrežeme zo všetkých strán fyzikálne teleso a pritom zakaždým zmenšíme, povedzme dvakrát, jeho priemer.

A. N. Kolmogorov

Aké sú teda tie axiómy?

Len nie tak zhurta! Najprv musíme vedieť, čoho pravdepodobnosť vlastne chceme počítať. Že na kocke padne párne číslo, že kontrolovaný výrobok bude možné exportovať, že kozmická raketa dosiahne očakávanú výšku a pod. To niečo sa zvykne po slovensky nazývať *náhodná udalosť*, alebo len udalosť, jav, alebo *náhodný jav*, po rusky *sobytie*, po anglicky *event*. Napokon nie je také dôležité ako sa to volá. V Kolmogorovovej axiomatike je to množina.

Naše axiómy budú pozostávať z dvoch grúp. Prvá sa bude týkať systému $\mathcal{S}$ množín (udalostí), ku každej z ktorých bude priradené v druhej grupe nejaké reálne číslo — jej pravdepodobnosť.

[1] Tento článok je nezávislý od 1. časti uverejnenej v Mat. obzoroch č. 13 a tak isto od nasledujúcej 3. časti (čo sa, ostatne, dalo očakávať).

Axiómy teórie pravdepodobnosti:

I. Daná je neprázdna množina Ω a systém $\mathscr{S}$ podmnožín množiny Ω, taký, že platí:

1. $\emptyset \in \mathscr{S}$, $\Omega \in \mathscr{S}$.
2. Ak $A \in \mathscr{S}$, tak aj $A' = \Omega \setminus A \in \mathscr{S}$.
3. Ak $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{S}$, tak aj $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathscr{S}$.

II. Dané je zobrazenie $P: \mathscr{S} \to R$ také, že

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geqq 0$ pre všetky $A \in \mathscr{S}$.
3. Ak $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{S}$, A_i sú navzájom disjunktné, tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Pravdaže, nie je možné takto vysypať pred žiakov axiómy. Potrebná je motivácia. Pokiaľ ide o prvú skupinu axióm, nemala by robiť ťažkosti. Veď napr. súvis medzi opačnou udalosťou k udalosti A (neuskutoční sa udalosť A) a doplnkom množiny A je veľmi názorný. Ostatne, jestvuje tu ešte ďalšia analógia: *opačná udalosť — negácia výroku — doplnok množiny.* (Podobne: *nastatie jednej z udalostí A, B — disjunkcia výrokov — zjednotenie množín.*) V školskej praxi prichádza do úvahy len prípad konečného systému $\mathscr{S}$. V tom prípade sa obvykle uvažuje o systéme $\mathscr{S} = 2^{\Omega}$ všetkých podmnožín množiny Ω. Žiakom teda nebudeme hovoriť o prvej skupine axióm. Postačí definícia: udalosť = podmnožina danej konečnej množiny Ω. (Pravdaže, v prípade nekonečného množstva udalostí sa Kolmogorovove axiómy uplatnia v plnej kráse.)

Vážnejšia je otázka samotnej pravdepodobnosti. To, že pravdepodobnosť je vždy číslo medzi nulou a jednotkou (čo odpovedá vo verejnosti obvyklejšiemu percentuálnemu odhadu), že pravdepodobnosť nemožného je nula a istého jedna, to je pochopiteľné a prijateľné. Pozastaviť sa treba pri tretej vlastnosti — aditívnosti. Motivovať ju možno dvojako:

1. *Laplaceova schéma.* Pracuje sa s konečnou množinou Ω. Pravdepodobnosť množiny A je číslo

$$P(A) = \frac{\text{počet prvkov množiny } A}{\text{počet prvkov množiny } \Omega}$$

Vezmime napr. obligátny hod kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že padne stena s párnym počtom bodiek? V tomto prípade máme

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad A = \{2, 4, 6\}$$

teda

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ak sú množiny A, B disjunktné, tak počet $|A \cup B|$ prvkov množiny $A \cup B$ je súčtom počtu $|A|$ prvkov množiny A a počtu $|B|$ prvkov množiny B, $|B \cup B| = |A| + |B|$. Preto

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

2. *Relatívna početnosť.* Robíme skutočné experimenty, napr. hádžeme kockou. Pokus uskutočníme n-krát, k_1-krát nastane A, k_2-krát nastane B. Predpokladajme, že A, B sú disjunktné (napr. A je padnutie párneho čísla, B je padnutie trojky). Relatívne početnosti udalosti A resp. B sú $\mu(A) = k_1/n$, $\mu(B) = k_2/n$. Výsledky už nemusia byť také učesané ako v prípade Laplaceovej schémy. Môžu sa od očakávanej pravdepodobnosti dosť líšiť. Ale či už ukazujú na nejakú stabilitu, alebo nie, udalosť $A \cup B$ nastane v danej sérii pokusov práve $(k_1 + k_2)$-krát. Preto

$$\mu(A \cup B) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = \mu(A) + \mu(B)$$

Keď sme sa už presvedčili, že Kolmogorovove axiómy sú prijateľné, všimnime si ich trochu bližšie. Toľko spomínaná vlastnosť 3 z druhej skupiny znamená viac ako aditívnosť, tzv. σ-aditívnosť. Množín A_n v 3 pripúšťame totiž nekonečne (hoci spočítateľne) veľa. Schválne sme axiómy formulovali tak, aby nekonečno nestrašilo už pri prvom pohľade na ne. Poctivo sformulovaná σ-aditívnosť vyzerá takto:

Ak

$$A_n \in \mathcal{S}(n = 1, 2, \ldots), \quad A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m),$$

tak

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Samozrejme, aditívnosť vyplýva zo σ-aditívnosti ako špeciálny prípad: Ak

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j),$$

tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Stačí položiť $A_i = \emptyset$ pre $i > n$. Potom sú A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ navzájom disjunktné, teda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Aj keď σ-aditívnosť má svoje pevné miesto v teórii pravdepodobnosti, v školskej praxi vystačíme s aditívnosťou. Tu totiž neprichádza do úvahy iný prípad ako konečný priestor Ω. A v takomto priestore neexistuje nekonečne veľa neprázdnych navzájom disjunktných množín. Nech

$$\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \mathscr{S} = 2^{\Omega}$$

Označme $p_i = P(\{x_i\})$. Týchto n čísel potom opisuje dokonale celú situáciu, lebo pre $A \subset \Omega$ je

$$P(A) = P\left(\bigcup_{x_i \in A} \{x_i\}\right) = \sum_{x_i \in A} P(\{x_i\}) = \sum_{x_i \in A} p_i$$

V školskom (totiž konečnom) prípade sa nám vznešené axiómy scvrknú na n nezáporných čísel, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ktorých súčet je 1. V špeciálnom prípade

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n$$

máme $n\, p_i = 1$, teda $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$, odkiaľ

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} \frac{1}{n} = m\,\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

kde $A=\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$, teda m je počet prvkov množiny A.

Laplaceova schéma je špeciálnym prípadom pravdepodobnosti definovanej Kolmogorovovými axiómami.

Aký význam má teda axiomatická metóda v školskej pravdepodobnosti? Skôr ideový, výchova k elegancii a neskorším aplikáciám. Veď nie je ťažké si uvedomiť, že s konečným pravdepodobnostným priestorom nemožno vystačiť naveky. Prednosti axiomatického prístupu si ukážeme na príkladoch.

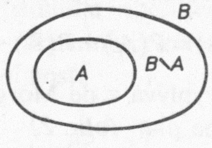
Hneď za citáciou axióm sme medzi rečou prehlásili, že pravdepodobnosť ľubovoľnej množiny je číslo medzi nulou a jednotkou. Lenže v axiómach stojí len toľko, že $P(A) \geqq 0$ pre všetky $A \in \mathscr{S}$. Nerovnosť $P(A) \leqq 1$ treba pomocou axióm dokázať.

Veta 1. Nech A, $B \in \mathscr{S}$, $A \subset B$. Potom $B \setminus A \in \mathscr{S}$ a $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

Dôkaz. Aby sme dokázali prvé tvrdenie, uvážme, že platí

$$B \setminus A = B \cap A' = (B' \cup A)'$$

Ďalej *(obr. 1)*



Obr. 1

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

pričom A, $B \setminus A$ sú disjunktné. Preto z aditívnosti funkcie P dostávame

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Dôsledok 1. Ak A, $B \in \mathscr{S}$, $A \subset B$, tak $P(A) \leqq P(B)$.

Dôkaz. Podľa 2. axiómy je $P(B \setminus A) = 0$. Preto podľa vety 1 $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqq P(A) + 0 = P(A)$.

Dôsledok 2. Pre všetky $A \in \mathscr{S}$ platí $P(A') = 1 - P(A)$.

Dôkaz. Položme $B = \Omega$. Potom z vety 1 a axiómy 1 dostaneme

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\Omega \setminus A) = P(A) + P(A')$$

Pravdaže, v prípade konečného Ω možno uvedené tvrdenia dokázať oveľa kratšie. Či aj metodicky prijateľnejšie, to je otázka. Ukážeme ho na dôsledku 1. Pravdepodobnosť (v konečnom prípade) množiny A je súčet tých p_i, pre ktoré $x_i \in A$. Ak $A \subset B$, tak do analogického súčtu pre množinu B patria všetky p_i, ktoré patrili do súčtu pre A. A možno aj niektoré ďalšie. Vzhľadom na to, že všetky p_i sú nezáporné, platí

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i \leqq \sum_{x_i \in B} p_i = P(B)$$

Skutočný prínos pravdepodobnostnej axiomatiky vidíme v akcentovaní aditívnosti vo výučbe. Ukážeme to na ďalších príkladoch.

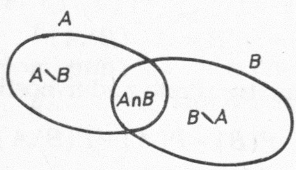
Ešte o aditívnosti

Už vieme, že $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ak A, B sú disjunktné. Ale čo, ak A, B disjunktné nie sú?

Veta 2. Pre ľubovoľné A, $B \in \mathcal{S}$ je $A \cap B \in \mathcal{S}$ a platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dôkaz. Prvé tvrdenie vyplýva z de Morganových pravidiel: $A \cap B = (A' \cup B')'$. Ďalej, zrejme platí *(obr. 2)*



Obr. 2

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \setminus (A \cap B))$$

pričom množiny A, $B \setminus (A \cap B)$ sú disjunktné. Zostáva použiť aditívnosť a vetu 1

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus(A\cap B))=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Príklad. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri dvojnásobnom hode kockou aspoň raz padne šesťka?

Prvé riešenie nájdeme tak, že v zmysle Laplaceovej schémy (všetky dvojice sú rovnako pravdepodobné — prečo by aj neboli?) zrátame všetky možnosti. Pri dvojnásobnom hode kockou máme celkom 36 možností (1, 1), ..., (6, 6), z toho aspoň jednu šesťku obsahujúcich dvojíc je 11 : (1, 6), ..., (6, 6), (6, 1), ..., (6, 5). Preto je hľadaná pravdepodobnosť

$$\frac{11}{36}$$

Pravdaže, môžeme ísť na to aj vedeckejšie — cez vetu 2. Nech A odpovedá padnutiu šesťky na prvej kocke, B — na druhej. Hľadáme

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$$

Nakoniec si spomenieme na dôsledok 2 vety 1: $P(C') = 1-P(C)$. Namiesto pravdepodobnosti padnutia aspoň jednej šesťky možno vypočítať pravdepodobnosť opaku — nepadnutia ani jednej šesťky, a to je 26/36. Preto je hľadaná pravdepodobnosť

$$1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$$

Môžeme pokračovať aj ďalej: čo s troma, štyrmi, piatimi množinami? **Veta 3.** Pre ľubovoľné A, B, $C\in\mathcal{S}$ platí

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Dôkaz. Použijeme najprv vetu 2 na množiny A, $B\cup C$, teda

$$P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C)).$$

Ďalej znovu použijeme vetu 2, a to jednak na množiny B, C, jednak na $A\cap B$, $A\cap C$ (uvážme, že $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$). Dostaneme

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-$$
$$-P(A\cap C)+P((A\cap B)\cap(A\cap C))$$

Žiaci nám asi takýto dôkaz nespravia. Pôjdu asi cez Vennov diagram a aj túto cestu treba privítať. Prednosť uvedeného dôkazu je v tom, že obsahuje vlastne indukčný krok (v tomto prípade z 2 na 3). Naopak, Vennov diagram je už v prípade $n=4$ dostatočne neprehľadný a skresľujúci. Tak či onak, samotné znenie vety 3 je dosť inšpirujúce na ďalšie zovšeobecnenie, aspoň pre $n=4$.

Rozhádzané klobúky

Do reštaurácie príde n osôb s úplne rovnakými klobúkmi (či aktovkami, legitimáciami, kľúčmi od mot. vozidla a pod.). Pri odchode si ich náhodne vyberajú, pretože klobúky sú neoznačené. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden z nich odíde vo svojom klobúku? Túto úlohu rozriešime pre $n=4$.

Príklad. Sekretárka vkladá štyri listy napísané štyrom rôznym osobám do štyroch pripravených obálok. Súc zamyslená nedáva pozor na to, čo tam vkladá. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden z listov bude vložený do správnej obálky?

Nech A_i spočíva v tom, že i-ty list bude vložený do správnej obálky. Máme vypočítať $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$. Veta 3 nás vedie k formule

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-$$
$$-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-\ldots-P(A_3\cap A_4)+$$
$$+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4)+\ldots+P(A_2\cap A_3\cap A_4)-$$
$$-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4).$$

Počítajme teraz $P(A_1)$. Všetkých možných rozmiestnení štyroch listov do štyroch obálok je $4!$ Ak je prvý list v správnej obálke, ostatné tri možno do zvyšných troch obálok rozmiestniť $3!$ spôsobmi. Preto

$$P(A_1)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$$

Podobne $P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4}$. Počítajme $P(A_1\cap A_2)$. Ak sú prvé dva listy vo svojich obálkach, zvyšné dva môžeme rozmiestniť 2! (slovami dvoma) spôsobmi. Preto

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3}.$$

Ten istý výsledok dostaneme v prípade $P(A_1 \cap A_3)$, ..., $P(A_3 \cap A_4)$. Týchto pravdepodobností je celkom $\binom{4}{2} = 6$. Podobne sa vypočíta

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dots = P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4!}$$

Celkove dostávame

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \binom{4}{2} \frac{1}{4 \cdot 3} + \binom{4}{3} \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{1}{4!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

Dostali sme pôsobivý výsledok veľmi navádzajúci k zovšeobecneniu. My sa však dáme inou cestou: už je na čase, aby sme sa začali zaoberať niečím vážnejším.

Čo s podmienenou pravdepodobnosťou?

Definícia. Nech $B \in \mathcal{S}$, $P(B) > 0$, $A \in \mathcal{S}$. Potom definujeme podmienenú pravdepodobnosť $P(A \mid B)$ udalosti A za podmienky B rovnosťou

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

To je všetko, čo môžeme povedať v rámci axiomatiky. Opäť sa veľmi žiada motivácia. Uvedieme hneď tri možnosti:

1. Majme v urne 2 biele a 3 zelené guľky. Ťahajme dvakrát za sebou. Pritom guľku po prvom ťahu nevraciame. Pravdepodobnosť $P(B_1)$ toho, že pri prvom ťahu vytiahneme bielu guľku je zrejme $P(B_1) = 2/3$. Pravde-

podobnosť vytiahnutia zelenej guľky pri druhom ťahu závisí od toho, čo bolo vytiahnuté pri prvom ťahu. Ak to bola biela, tak sú v urne už len 4 guľky, z toho 3 zelené. Za týchto podmienok je pravdepodobnosť vytiahnutia zelenej 3/4, čo zapisujeme

$$P(Z_2 | B_1) = \frac{3}{4}$$

A to je tá podmienená pravdepodobnosť. Aby sme mali o tom lepší prehľad, očíslujeme biele guľky b_1, b_2, zelené z_1, z_2, z_3 a napíšeme schému zo všetkých do úvahy prichádzajúcich dvojíc (nemôžu to byť (b_1, b_1), (b_2, b_2), (z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_3, z_3) — ak sme už niečo vytiahli prvýkrát, nemôžeme aj druhýkrát, lebo to tam nie je).

B_1		(b_1, b_2)	(b_1, z_1)	(b_1, z_2)	(b_1, z_3)	$B_1 \cap Z_2$
	(b_2, b_1)		(b_2, z_1)	(b_2, z_2)	(b_2, z_3)	
	(z_1, b_1)	(z_1, b_2)		(z_1, z_2)	(z_1, z_3)	
	(z_2, b_1)	(z_2, b_2)	(z_2, z_1)		(z_2, z_3)	
	(z_3, b_1)	(z_3, b_2)	(z_3, z_1)	(z_3, z_2)		
			Z_2			

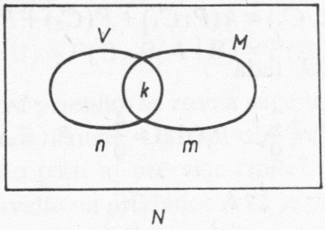
Bezprostredný výpočet vedie k vzťahu

$$P(Z_2 | B_1) = \frac{3}{4} = \frac{\dfrac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4}}{\dfrac{4 \cdot 2}{5 \cdot 4}} = \frac{P(B_1 \cap Z_2)}{P(B_1)}$$

Vyloženie pojmu týmto spôsobom je viac ako jasné, no odvodenie formuly nepresvedčivé. Veľa nezlepší ani všeobecný prípad, kedy máme v urne x bielych a y zelených guliek. Platí

$$P(Z_2 | B_1) = \frac{y}{x + y - 1} = \frac{\dfrac{xy}{(x+y)(x+y-1)}}{\dfrac{x}{x+y}} = \frac{P(B_1 \cap Z_2)}{P(B_1)}$$

2. Skupina ľudí pozostáva z N osôb. Medzi nimi je m mužov. Ďalej je známe, že v tej skupine je n vysokých osôb, z nich je k mužov *(obr. 3).*

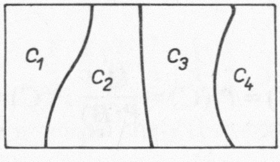


Obr. 3

Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý muž bude vysoký? Zrejme

$$P(V|M) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{N}}{\frac{m}{N}} = \frac{P(V \cap M)}{P(M)}$$

3. V ľahkoatletickom preteku sú šance štyroch pretekajúcich na výhru takéto: $P(C_1) = 0{,}2$, $P(C_2) = 0{,}4$, $P(C_3) = 0{,}3$, $P(C_4) = 0{,}1$. Ako sa zmenia tieto pravdepodobnosti, ak posledný pretekár odstúpi zo štartu?



Obr. 4

Pravdepodobnosť výhry sa u každého zostávajúceho pretekára zvýši, a to úmerne *(obr. 4).* Ak P_1 je tá nová pravdepodobnosť, tak existuje také k, že

$$P_1(C_1)=kP(C_1), \quad p_1(C_2)=kP(C_2), \quad P_1(C_3)=kP(C_3)$$

To je prvá podmienka. Druhá spočíva v tom, že $P_1(C_4)=0$, teda

$$1=P_1(C_1\cup C_2\cup C_3)=k(P(C_1)+P(C_2)+P(C_3))=k0{,}9$$

Odtiaľ $k=1/0{,}9 \;=\; 10/9$, teda

$$P_1(C_1)=\frac{2}{9}, \quad P_1(C_2)=\frac{4}{9}, \quad P_1(C_3)=\frac{1}{3}$$

Inak zapísané

$$P(C_1\,|\,C_4')=\frac{2}{9}, \quad P(C_2\,|\,C_4')=\frac{4}{9}, \quad P(C_3\in C_4')=\frac{1}{3}$$

Skúsme nájsť všeobecný vzťah. Nech B hrá funkciu C_4' (štvrtý pretekár sa vzdal). Na podmnožinách $C\subset B$ dostávame novú pravdepodobnosť P_1, takú, že

$$P_1(B)=1, \quad P_1(C)=kP(C) \; (C\subset B,\, C\in\mathcal{S})$$

Z uvedených dvoch podmienok vyplýva špeciálne pre $C=B$

$$1=P_1(B)=kP(B)$$

teda

$$k=\frac{1}{P(B)}$$

odkiaľ

$$P(C\,|\,B)=P_1(C)=\frac{1}{P(B)}\,P(C)=\frac{P(C)}{P(B)}$$

Ak je teraz $A\in\mathcal{S}$ ľubovoľná množina, nie nevyhnutne časť množiny B, je rozumné v podmienenej pravdepodobnosti akceptovať len tú časť množiny A, ktorá zasahuje do B. Preto definujeme

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

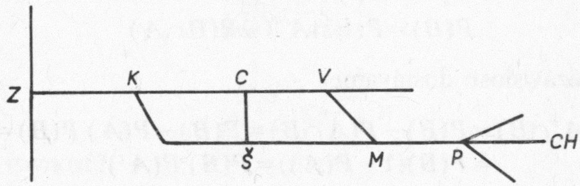
Pozvánka na chatu

Vzorec definujúci podmienenú pravdepodobnosť môžeme využiť výhodne v opačnom smere

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B) = P(A)\, P(B \mid A)$$

Teda pravdepodobnosť prieniku sa rovná súčinu pravdepodobností, pravda, jedna z nich je podmienená. Okrem toho je k uvereniu tá skutočnosť, že analogické pravidlo platí aj pre viac činiteľov.

Ilustrujme toto pravidlo na príklade: Aká je pravdepodobnosť nájdenia autorovej chaty v Novej Bani? Začiatok je na hlavnej ceste Zvolen—Bratislava a cestná sieť je schematicky zobrazená na *obr. 5.* Keďže nepredpokladáme cestu nazad, zo Z do CH sa môžeme dostať štvorako



Obr. 5

Z K Š M P CH   Z K Š C V M P CH   Z K C M P CH   Z K C V M P CH

Podľa vety o súčine pravdepodobností sú pravdepodobnosti jednotlivých ciest po rade takéto

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

Preto pravdepodobnosť nájdenia chaty (bez opýtania sa a bez mapy) je

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

Niet sa teda čo čudovať, že nás niektorí priatelia nevedia nájsť. Najmä keď vždy stratia starostlivo nakreslený plán. Možno sa situácia zlepší po uverejnení tohto článku.

K takýmto výpočtom nám axiómy neboli treba. Ukážeme si príklad na elementárnu prácu s axiómami v tejto etape.

Budeme pracovať s nezávislosťou. Dve udalosti A, B sú nezávislé, ak pravdepodobnosť A nezávisí od toho, či sa B uskutočnila, alebo nie, teda ak $P(A \mid B) = P(A)$. Ak si za $P(A \mid B)$ dosadíme, dostaneme trochu všeobecnejšiu definíciu nezávislosti (nevyžadujúcu kladnosť pravdepodobností $P(A)$, $P(B)$).

Definícia. Udalosti $A, B \in \mathcal{S}$ sa nazývajú *nezávislé*, ak

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Veta 4. Ak sú A, B nezávislé, tak sú nezávislé aj A', B, resp. A', B'.

Dôkaz. Z aditívnosti pravdepodobnosti vyplýva

$$P(B) = P(B \cap A') + P(B \cap A)$$

Odtiaľ a z nezávislosti dostávame

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)\, P(B) = \\ &= P(B)(1 - P(A)) = P(B)\, P(A') \end{aligned}$$

Druhé tvrdenie možno dostať dvojnásobnou aplikáciou prvého, alebo priamo takto

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P((A \cup B)') = \\ &= 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\, P(B) = \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = \\ &= P(A')P(B') \end{aligned}$$