i

BOHDAN ZELINKA, Liberec

My nematematikové však chceme vědět, jak to s tou druhou odmocninou z -1 vlastně je. Existuje, nebo neexistuje? Podívejte: číslo, které samo sebou násobeno dává -1, neexistuje, ale druhá odmocnina z -1 existuje. Jmenuje se „i" a dost. Matematika, je zkrátka věda o věcech, které neexistují. Nebo lépe, v matematice existují věci, které neexistují.

Když se takové imaginární číslo zaplete do číselného výrazu, vznikne výraz komplexní. To znamená, že když někdo o tom déle přemýšlí, dostane matematický komplex a je to beznadějný případ, s kterým už není rozumná řeč. Oběť vědy. Lidé se pak diví, že ten pán namáčí pero do černé kávy a upíjí inkoust a proč to dělá. Má v hlavě imaginární číslo, a proto je to muž komplexní.

Jaroslav Žák

Číslo i a komplexní čísla vůbec jsou pro mnohé lidi obestřena jakýmsi závojem tajemnosti. Člověk si dovede představit číselnou osu, například jako stupnici teploměru prodlouženou na obou stranách do nekonečna. Je známo, že na ní nemůžeme najít žádné číslo, jehož druhá mocnina by se rovnala minus jedné nebo vůbec kterémukoliv zápornému číslu. A najednou se dovíme, že takové číslo existuje, ovšem nikoliv na této číselné ose, ale někde vedle. Jak se mohlo na něco takového přijít?

Tomu, kdo se seznámil s abstraktní algebrou, je to jasné. V tělese reálných čísel neexistuje prvek, jehož druhá mocnina by byla rovna minus jedné. Hledáme tedy průnik všech těles, která obsahují těleso reálných čísel jako podtěleso a navíc ještě obsahují jistý prvek i, pro nejž platí $i^2 = -1$. Tento průnik existuje a je jednoznačně určen. Rozhodneme se jej tedy nazvat tělesem komplexních čísel a je to.

Tohle bychom ovšem těžko vykládali lidem, kteří neznají jiná tělesa než krychli, kvádr, hranol, jehlan, válec, kužel a kouli. Těm je naprosto cizí představa, že existují nějaké prvky, o nichž se neví nic jiného, než že s nimi lze určitým způsobem provádět jisté operace. (Ostatně i při slově operace se většině lidí vybaví skalpel a bílé roušky na ústech.) Tito lidé se budou ptát, jak je možné, že mluvíme o existenci něčeho, co přece neexistuje.

Zamysleme se tedy, jak to s tou existencí vlastně je. Dobrá, jestliže neexistuje číslo i, existuje číslo 5? Samozřejmě, odpoví nematematik. Přece můžeme mít pět jablek, pět hrušek, pět korun nebo pětku v žákovské knížce.

Argument založený na pětce v žákovské knížce lze snadno vyvrátit. Známky v škole jsou pouze určité symboly množství znalostí žáka. Že se označují čísly 1, 2, 3, 4, 5, to je prostě proto, že je to v našem školském systému odedávna zavedeno. Bylo by možno provést reformu spočívající v tom, že místo známkami 1, 2, 3, 4, 5 by se známkovalo známkami e, f, g, h, i. Pak by to i v žákovské knížce bylo stejně skutečné, jako je nyní pětka.

A jak je to s těmi pěti jablky? Ano, můžeme mít pět jablek, pět hrušek nebo pět kusů čehokoli jiného. Můžeme však mít jenom „pět" bez bližšího učení? Jak to tedy je? Existuje „pět"? Ovšemže; je to pojem vzniklý abstrakcí, vyjadřuje společnou vlastnost určitých množin, jako je množina pěti jablek, množina pěti hrušek a vůbec jakákoli množina o pěti prvcích. A ta abstrakce jde ještě dále. Mluvíme-li o pěti korunách, rozhodně nemusíme mít vždy na mysli pět korunových mincí.

Dobře tedy, číslo 5 existuje zrovna tak jako třeba jablko nebo hruška. A existuje-li jablko i hruška, pak zřejmě existuje i dvojice složená z jablka a hrušky. Tudíž existují i uspořádané dvojice reálných čísel. Vezměme si tedy všechny možné uspořádané dvojice reálných čísel a definujme si na nich početní úkony (neužívám slova operace, abych zbytečně nevyvolával představu skalpelu zařezávajícího se do lidského těla). Jsou-li $[a, b]$, $[c, d]$ dvě takovéto dvojice, pak si definujeme

$[a, b] + [c, d] = [a, + c, b + d]$,
$[a, b] - [c, d] = [a - c, b - d]$,
$[a, b] \,.\, [c, d] = [ac - bd, ad + bc]$,
$[a, b] \,/\, [c, d] = [(ac + bd)/(c^2 + d^2), (bc - ad)/(c^2 + d^2)]$.

(Dělení je definováno v případě, kdy alespoň jedno z čísel c, d je různé od nuly.) Pro tyto úkony platí všechny zákony, které známe pro úkony s reálnymi čísly. Všimněme si, jak to vypadá, když $b = d = 0$. Pak

$[a, 0] + [c, 0] = [a + c, 0]$,
$[a, 0] - [c, 0] = [a - c, 0]$,
$[a, 0] \cdot [c, 0] = [ac, 0]$
$[a, 0] \,/\, [c, 0] = [a/c, 0]$.

Tedy početní úkony s dvojicemi, v nichž druhé číslo je nula, se provádějí docela stejně, jako kdybychom je prováděli s jejich prvními čísly samotnými. Můžeme si tedy představit, že každou dvojici $[a, 0]$ prostě ztotožníme s číslem a. Kdybychom však zkoumali dvojice, v nichž je první číslo rovno nule, k podobnému výsledku bychom nedošli. Proč jsme si tedy početní úkony definovali takovým divným způsobem? Odpověď je jednoduchá: abychom dostali

$$[0, 1].[0, 1] = [-1, 0]$$

a abychom tedy dvojici $[0, 1]$ mohli pokládat za odmocninu z dvojice $[-1, 0]$ a tedy z čísla -1.

Tohle je stále ještě divné. Co nás to vůbec napadlo zavádět si nějaké početní úkony ne s čísly, ale s dvojicemi čísel? Cožpak lze provádět početní úkony s něčím jiným než s čísly? Ale ano! Vzpomeňme si na geometrii; tam sčítáme úsečky nebo úhly a vůbec nám nevadí, že to nejsou čísla. (Jejich velikost ovšem jsou čísla, avšak nesmíme zaměňovat úsečku a její velikost ani úhel a jeho velikost.) A máme-li funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$, můžeme najít jejich součet, kterým je funkce $y = \sin x + \cos x$, jejich rozdíl $y = \sin x - \cos x$, součin $y = \sin x \cos x$ i podíl $y = \sin x / \cos x$. Zde také neprovádíme početní úkony s čísly, ale s funkcemi; výsledek je opět funkce.

Můžeme-li tedy provádět početní úkony s úsečkami, úhly a funkcemi, můžeme je provádět i s uspořádanými dvojicemi reálných čísel. A máme-li je takto zavedeny, pak si ještě zjednodušíme způsob zápisu, abychom nemuseli stále psát hranaté závorky. Místo dvojice $[a, 0]$ budeme psát pouze čísla a. Dvojici $[0,1]$ označíme jako i. Pro libovolnou dvojici $[a, b]$ máme

$$[a, b] = [a, 0] + [0, b] = [a, 0] + [b, 0].[0, 1]$$

a můžeme tedy místo $[a, b]$ psát $a + bi$. Takovýmto výrazům budeme říkat komplexní čísla. Je-li $b = 0$, číslo $a + bi$ je reálné číslo a; komplexní čísla, která nejsou reálná, se budou nazývat imaginární.

Zavedení komplexních čísel jakožto dvojic reálných čísel není nic nového; však odtud vlastně pochází výraz komplexní číslo. Uvádím to zde proto, abychom si uvědomili, že na komplexních číslech není nic tajemného. Počítáme prostě s uspořádanými dvojicemi reálných čísel a pro jednoduchost těmto dvojicím také říkáme čísla. A ono tajemné i není nic jiného než uspořádaná dvojice $[0, 1]$. Jestliže existuje 0 a 1, pak tedy existuje i i.

Na množině komplexních čísel nejen zavádíme běžné početní úkony, ale rozšiřujeme na ni i některé funkce, které jsme znali jako funkce reálné proměnné. U polynomů je to zcela pochopitelné; jejich hodnoty jsou vyjádřeny pomocí základních početních úkonů. Zavádíme však například i exponenciální funkce komplexní proměnné, a to tak. že hodnota funkce e^x pro $x = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla, je

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Také toto číslo budí v lidech rozpaky. Proč je ta funkce definována právě takto a ne nějak jinak? Ukážeme si, že to opravdu nejde jinak.

Uvědomme si nejdříve, o co nám jde. Chceme definovat funkci e^x pro všechna komplexní x. Přitom ji už máme definovánu pro všechna x reálná a rozhodně bychom chtěli, aby se hodnoty naší nové funkce pro x reálná (každé reálné číslo je také komplexní číslo) nelišily od hodnot, které jsou už zavedeny. Dále bychom chtěli, aby i pro libovolná komplexní čísla x a y platilo

$$e^{x+y} = e^x . e^y.$$

Speciálně tedy máme-li komplexní číslo $a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla, mělo by platit

$$e^{a+bi} = e^a . e^{bi}.$$

Výraz e^a je hodnota funkce e^x pro x rovné reálnému číslu a. Abychom tedy měli určeno e^{a+bi}, je třeba vhodně definovat e^{bi}. Potřebujeme tedy zavést funkci e^{xi}, kde x je reálné číslo; jakmile je zavedeme, budeme mít definovánu exponenciální funkci pro všechny komplexní hodnoty nezávisle proměnné.

Funkce e^{xi} je funkce, která každému reálnému x přirazuje nějaké komplexní číslo. Máme tedy

$$e^{xi} = f(x) + g(x)i, \tag{1}$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce reálné proměnné. Nyní si uvědomíme, že derivace funkce e^{ax} definovaná pro reálné x a s reálnou konstantnou a

je rovna ae^{ax}. Přirozeně bychom tedy chtěli, aby derivace funkce e^{xi} byla rovna $e^{xi}i$. Tedy by mělo platit

$$e^{xi}i = f'(x) + g'(x)i.$$

Dosadíme-li za e^{xi} z (1), dostáváme

$$(f(x) + g(x)i)i = f'(x) + g'(x)i$$

čili

$$-g(x) + f(x)i = f'(x) + g'(x)i.$$

Tato rovnost nastane tehdy, rovnají-li se sobě reálné složky obou stran a rovnají-li se sobě i složky imaginární. Tedy

$$f'(x) = -g(x),$$
$$g'(x) = f(x).$$

Derivováním obou stran druhé rovnice dostáváme

$$g''(x) = f'(x).$$

Můžeme tedy do první rovnice dosadit za $f'(x)$ výraz $g''(x)$ a dostaneme

$$g''(x) = -g(x).$$

Tuto diferenciální rovnici umíme řešit. (Lze namítnout, že k jejímu řešení dojdeme právě přes komplexní čísla a přes exponenciální funkci komplexní proměnné. My však nepotřebujeme předstírat, že tyto věci neznáme; neukazujeme zde, jak se přišlo na exponenciální funkci komplexní proměnné, ale ukazujeme pouze, že se nemohla zavést nijak jinak.) Její řešení je

$$g(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Potom

$$f(x) = C_2 \cos x - C_1 \sin x.$$

Samozřejmě pro $x = 0$ by mělo být $e^{xi} = 1$ a tedy máme

$$f(0) = 1,$$
$$g(0) = 0.$$

Z těchto podmínek dostáváme $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ a tedy máme

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x .$$

Vidíme, že skutečně by exponenciální funkci komplexní proměnné nebylo možno definovat jinak, pokud na ni klademe výše uvedeně požadavky, které jsou zcela přirozené.

Máme tedy zavedena komplexní čísla a mezi nimi máme i odmocninu z minus jedné. Snadno přijdeme na to, že potom ke každému zápornému číslu najdeme komplexní číslo, jehož druhá mocnina se rovná danému číslu. To by nebylo ještě nic světoborného; důležité však je to. že v množině komplexních čísel najdeme odmocninu nejen z každého reálného čísla, ale i z každého čísla komplexního. A nejen druhou odmocninu, ale n-tou odmocninu pro každé přirozené n. A co více, platí takzvaná základní věta algebry, která tvrdí, že každá algebraická rovnice má v komplexním oboru alespoň jeden kořen. Z ní potom plyne, že každá algebraická rovnice stupně n má právě n komplexních kořenů (počítáme-li je ovšem s jejich násobností). Komplexní čísla mají tedy nesmírný význam pro rozvoj teorie algebraických rovnic, bez níž bychom si matematiku nedovedli představit. S tím souvisí i jejich význam v teorii diferenciálních rovnic.

V elektrotechnice, termodynamice a hydrodynamice se často používá pojmu komplexního potenciálu, který samozřejmě také souvisí s číslem i. Tedy pro ty, kteří ani teď ještě nejsou přesvědčeni o užitečnosti komplexních čísel, lze uvést ryze pragmatický argument. To že můžeme užívat takových vymožeností civilizace jako elektrického osvětlení, ústředního topení a vodovodu, nám snad stojí za to, abychom se smířili s tím, že matematikové zavedli jakési nepochopitelné i.