HĽADÁME PODGRUPY KONEČNÝCH GRÚP

BOHUSLAV SIVÁK, Bratislava

K základným pojmom teórie grúp patria pojmy „podgrupa" a „invariantná podgrupa", o ktorých sa možno dočítať v [2] alebo v [4]. Tieto pojmy niekedy pôsobia začiatočníkom určité ťažkosti. Nie je síce problém prečítať si ich definície a ujasniť si všetky v nich vystupujúce pojmy, to však ešte neznamená skutočné pochopenie umožňujúce pracovať s podgrupami samostatne a spoľahlivo. Autor tohto článku napr. pozná študentov, ktorí sa v 4. semestri štúdia matematiky domnievali, že grupa, ktorej každá podgrupa je invariantná, je už nutne komutatívna. (Pritom existuje 8-prvkový kontrapríklad, s ktorým sa v inej súvislosti oboznámili.) Preto sa zdá, že by bolo výhodné, keby si čitateľ mohol sám konštruovať príklady podgrúp a skúmať ich invariantnosť, čo sa dá najlepšie urobiť v prípade konečných grúp.

V tomto článku popíšeme jednu z metód umožňujúcich k ľubovoľnej konečnej grupe (danej multiplikačnou tabuľkou, explicitným popisom operácie a pod.) nájsť všetky jej podgrupy. Kontrola invariantnosti je potom už pomerne jednoduchá.

V celom ďalšom texte sa predpokladá znalosť článkov [1] až [3], znalosť [4] nie je nevyhnutná, ale je vhodná.

1. Metóda hľadania podgrúp

Každá grupa G má tzv. triviálne podgrupy $\{1\}$ a G, kde 1 je neutrálny prvok grupy G (pri aditívnom zápise ho označujeme 0, okrem toho, miesto $\{1\}$ a $\{0\}$ budeme ďalej písať len 1 a 0). Ako uvidíme ďalej, môže existovať ešte veľa iných, tzv. netriviálnych podgrúp.

Najprv si všimnime, že každá podgrupa grupy G je generovaná nejakou neprázdnou podmnožinou množiny G (napr. sebou samou). Hľadanie všetkých podgrúp generovaných podmnožinami množiny G by však ešte vždy trvalo príliš dlho (i keď je zaručené, že „nezabudneme" na žiadnu podgrupu), preto treba túto metódu nejako vylepšiť. Jednou z možností je používanie tzv. inklúznych diagramov, čo si vysvetlíme na typickom príklade.

Príklad. Nájsť všetky podgrupy grupy $Z_2 \times Z_4$.

Poznámka. Pripomeňme si priamy súčin grúp. Ak $(G, *)$ a (H, ∇) sú grupy, tak na množine $G \times H$ môžeme definovať operáciu $\square$ takto:

$$(a, b) \square (a', b') = (a * a', b \nabla b'),$$

dá sa ľahko dokázať, že $G \times H$ s takto definovanou operáciou tvorí grupu, tzv. priamy súčin grúp G, H. V našom prípade sú grupy Z_2, Z_4 aditívne a aj operáciu v priamom súčine budeme zapisovať aditívne. Pri počítaní v našom priamom súčine treba dávať pozor na to, že prvé zložky sčitujeme v grupe Z_2 a druhé zložky v grupe Z_4, teda nesmieme si pomýliť moduly 2 a 4. Príklad výpočtu v grupe $Z_2 \times Z_4$:

$$(1, 2) + (1, 3) = (0, 1), \quad \text{alebo:} \quad (1, 3) + (0, 3) = (1, 2)$$

Nie je ťažké dokázať, že ak K je podgrupa grupy G a L je podgrupa grupy H, tak $K \times L$ je podgrupa grupy $G \times H$. Ako uvidíme ďalej, nie všetky podgrupy priameho súčinu grúp majú tento tvar (súčiny podgrúp daných grúp).

Riešenie príkladu. Daná grupa má 8 prvkov, a to:

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)$$

Pristúpime ku konštrukcii inklúzneho diagramu.

(a) Najprv nájdeme cyklické podgrupy (inými slovami, diagram začíname konštruovať „zdola"). Sú to:

$[(0, 0)] = \{(0, 0)\} = 0 \times 0$ (symboly 0 označujú triviálne podgrupy grúp Z_2 a Z_4 v zmysle dohovoru zo začiatku tohto odseku)

$[(0, 1)] = [(0, 3)] = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\} = 0 \times Z_4$

$[(0, 2)] = \{(0, 0), (0, 2)\} = 0 \times 2Z_4$

$[(1, 0)] = \{(0, 0), (1, 0)\} = Z_2 \times 0$

$[(1, 1)] = [(1, 3)] = \{(0, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 3)\}$

$[(1, 2)] = \{(0, 0), (1, 2)\}$

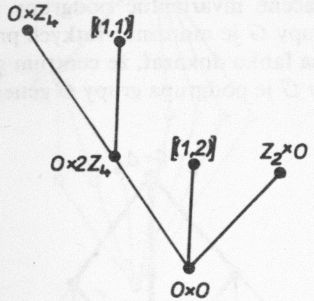
Všetky inklúzie medzi nimi zachytíme na diagrame (pozri *obr. 1,* z neho je jasné, ako diagram zostrojíme. Netreba spojiť napr. 0×0 s $(1, 1)$, lebo sú už spojené „cez $0 \times 2Z_4$"). Diagram zachytáva len „podstatné" inklúzie medzi cyklickými podgrupami: $0 \times 2Z_4 \subseteqq 0 \times Z_4$, $0 \times 2Z_4 \subseteqq [(1, 1)]$, $0 \times 0 \subseteqq 0 \times 2Z_4$, $0 \times 0 \subseteqq Z_2 \times 0$, $0 \times 0 \subseteqq$ $\subseteqq [(1, 2)]$.

(b) Pokračujeme v konštrukcii inklúzneho diagramu. Najprv nájdeme všetky dvojice tzv. neporovnateľných podgrúp (podgrupy H, H' grupy G sú neporovnateľné, ak žiadna z nich nie je podgrupou druhej, napr. v našom prípade $0 \times Z_4$ a $[(1, 2)]$ sú neporovnateľné). Nemá totiž zmysel generovať podgrupu dvoma prvkami, ktoré majú tú vlastnosť, že im zodpovedajúce cyklické podgrupy sú porovnateľné, napr. $[(0, 2), (1, 1)] = [(1, 1)]$, nedostaneme „novú" podgrupu. Táto skutočnosť je pre nás veľmi výhodná.

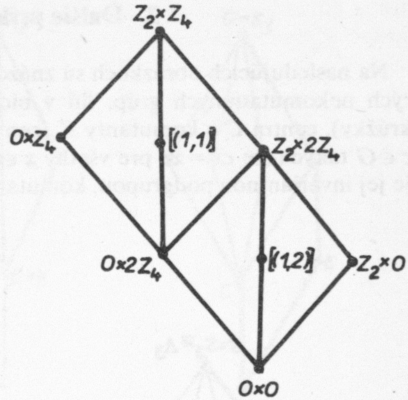
Na *obr. 1* nájdeme 8 dvojíc neporovnateľných podgrúp: každá z podgrúp $0 \times Z_4$, $[(1, 1)]$ je neporovnateľná s každou z podgrúp $Z_2 \times 0$, $[(1, 2)]$, každé dve z podgrúp $0 \times 2Z_4$, $Z_2 \times 0$, $[(1, 2)]$ sú neporovnateľné a podgrupy $0 \times Z_4$, $[(1, 1)]$ sú tiež neporovnateľné. Zodpovedajúce podgrupy generované dvojprvkovými množinami sú:

$0 \times 2Z_4, Z_2 \times 0 \ \ldots \ [(0, 2), (1, 0)] = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\} =$
$= Z_2 \times 2Z_4,$

$0 \times 2Z_4, [(1, 2)] \ldots [(0, 2), (1, 2)] = Z_2 \times 2Z_4,$



Obr. 1



Obr. 2

$Z_2\times 0,\ \ [(1, 2)] \ldots [(1, 0), (1, 2)] = Z_2\times 2Z_4,$
$0\times Z_4,\ \ Z_2\times 0\ \ldots [(0, 1), (1, 0)] = Z_2\times Z_4,$
$[(1, 1)],\ Z_2\times 0\ \ldots [(1, 1), (1, 0)] = Z_2\times Z_4,$
$0\times Z_4,\ \ [(1, 2)] \ldots [(0, 1), (1, 2)] = Z_2\times Z_4,$
$[(1, 1)], [(1, 2)] \ldots [(1, 1), (1, 2)] = Z_2\times Z_4,$
$0\times Z_4,\ \ [(1, 1)] \ldots [(0, 1), (1, 1)] = Z_2\times Z_4.$

Získali sme dve nové podgrupy: triviálnu podgrupu $Z_2\times Z_4$ a netriviálnu podgrupu $Z_2\times 2Z_4$. Zakreslíme ich do inklúzneho diagramu (pozri *obr. 2*).

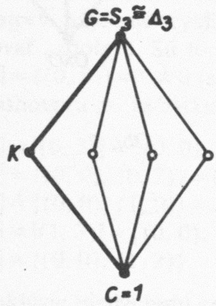
(c) Oproti *obr. 1* máme na *obr. 2* už len dve „nové" dvojice neporovnateľných podgrúp: $Z_2\times 2Z_4$ je neporovnateľná s každou z podgrúp $0\times Z_4$, $[(1, 1)]$. Zodpovedajúce podgrupy generované trojprvkovými množinami sú:

$Z_2\times 2Z_4, 0\times Z_4\ \ \ldots [(0, 2), (1, 0), (0,1)] = Z_2\times Z_4,$
$Z_2\times 2Z_4, [(1, 1)] \ldots [(0, 2), (1, 0), (1, 1)] = Z_2\times Z_4.$

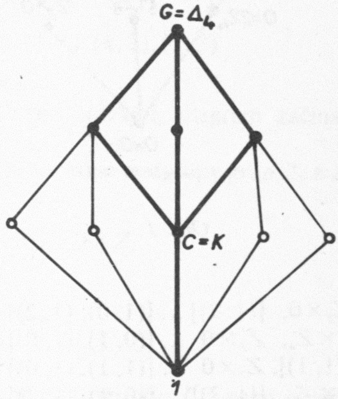
Pretože sme nedostali ďalšie podgrupy, nemá zmysel pokračovať. (Presnejšie: zistili sme, že každá podgrupa danej grupy generovaná trojprvkovou množinou je generovaná nejakou dvojprvkovou množinou, z toho sa dá dokázať, že každá konečne generovaná podgrupa danej grupy je generovaná nejakou dvojprvkovou alebo menejprvkovou množinou, a keďže sme v konečnej grupe, každá podgrupa je konečne generovaná.) Diagram na *obr. 2* teda dáva úplné riešenie príkladu. Spolu existuje 8 podgrúp (zhoda s rádom grupy je náhodná, pozri ďalej), všetky sú invariantné, lebo daná grupa je komutatívna.

2. Ďalšie príklady — výsledky

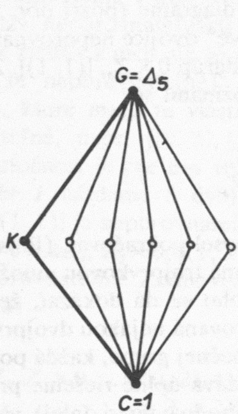
Na nasledujúcich obrázkoch sú znázornené inklúzne diagramy podgrúp niektorých nekomutatívnych grúp. Sú v nich vyznačené invariantné podgrupy (plné krúžky), centrá C a komutanty K (centrum grupy G je množina všetkých prvkov $c \in G$ takých, že $cx = xc$ pre všetky $x \in G$, dá sa ľahko dokázať, že centrum grupy je jej invariantnou podgrupou, komutant grupy G je podgrupa grupy G generova-



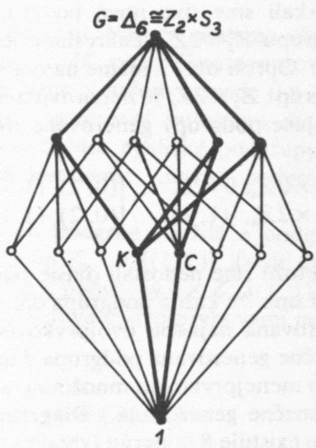
Obr. 3



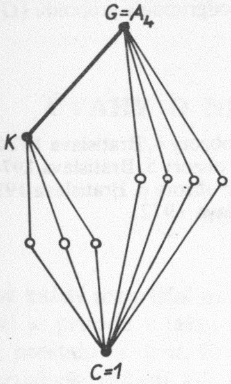
Obr. 4



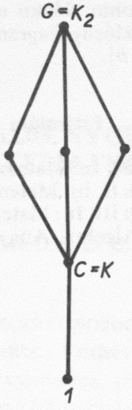
Obr. 5



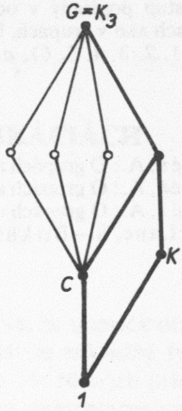
Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

ná množinou všetkých prvkov tvaru $aba^{-1}b^{-1}$, kde a, $b \in G$, je to najmenšia invariantná podgrupa grupy G, pre ktorú je faktorová grupa G/K komutatívna).

Označenia

$\mathscr{S}_n$ je grupa všetkých permutácií n-prvkovej množiny, $A_n \subseteqq \mathscr{S}_n$ je (invariantná) podgrupa všetkých párnych permutácií. Δ_n je grupa všetkých symetrií pravidelného n-uholníka, je generovaná dvoma prvkami R, D s definičnými reláciami

$$R^n = D^2 = 1,\ RDR = D$$

$\mathscr{K}_n$ je $4n$-prvková grupa generovaná prvkami U, V s definičnými reláciami

$$U^{2n} = 1, \quad V^2 = U^n, \quad UVU = V$$

Grupa $\mathscr{K}_1$ je izomorfná so Z_4, ostatné sú nekomutatívne. Pre $n = 2$ dostávame grupu $\mathscr{K}_2$, ktorej každá podgrupa je invariantná, tzv. grupu základných kvaterniónov — kontrapríklad spomínaný v úvode.

Cvičenia

1. Nájdite inklúzne diagramy podgrúp pre grupy Z_n, $n \leqq 20$
2. Nájdite inklúzne diagramy podgrúp pre nasledujúce grupy:

a) $Z_2 \times Z_2$ (5 podgrúp),
b) $Z_3 \times Z_3$ (6 podgrúp),
c) $Z_2 \times Z_6$ (10 podgrúp),
d) $Z_2, \times Z_2 \times Z_2$ (16 podgrúp).

3. Skontrolujte výsledky uvedené v odseku 2 tohto článku. Pre invariantné podgrupy popíšte zodpovedajúce faktorové grupy.

4. Postup popísaný v odseku 1 tohto článku možno použiť aj v iných algebraických štruktúrach ako v grupách. Nájdite inklúzny diagram pre podgrupoidy grupoidu $(G, *)$, kde $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a * b = |a - b|$.

Literatúra

[1] Legéň, A.: O grupách a okruhoch I. In: Matematické obzory 4, Bratislava 1974, s. 27.
[2] Legéň, A.: O grupách a okruhoch II. In: Matematické obzory 5, Bratislava 1974, s. 21.
[3] Legéň, A.: O grupách a okruhoch III. In: Matematické obzory 6, Bratislava 1974, s. 1.
[4] MacLane, S.—Birkhoff, G.: Algebra. Alfa, Bratislava 1972.