MATEMATICKÉ OBZORY 18/1982

GRUPY ROVINNÝCH TRANSFORMÁCIÍ II

JÁN ČIŽMÁR, Bratislava

Pre hodnosť matice $\mathbf{D}(\alpha)$ dostávame nasledujúce údaje.

3.a) Ak je α jednoduchý koreň charakteristickej rovnice kolineácie, matica $\mathbf{D}(\alpha)$ má hodnosť 2.

b) Ak je α dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice kolineácie, matica $\mathbf{D}(\alpha)$ má hodnosť 2 alebo 1.

c) Ak je α trojnásobný koreň charakteristickej rovnice kolineácie, matica $\mathbf{D}(\alpha)$ má hodnosť 2, 1 alebo 0.

V prípade b totiž platí $\mathbf{S}_2(\alpha)=0$, $\mathbf{S}_1(\alpha)\neq 0$, t. j. aspoň jeden hlavný subdeterminant stupňa 1 v matici $\mathbf{D}(\alpha)$ sa nerovná nule a hlavné subdeterminanty 2. stupňa, resp. ďalšie subdeterminanty 2. stupňa sa nemusia rovnať nule. Z toho je zrejmé tvrdenie o hodnosti matice $\mathbf{D}(\alpha)$.

Analogickou úvahou sa zdôvodňuje tvrdenie c.

Ak je α koreň charakteristickej rovnice, má sústava homogénnych rovníc

$$(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{I})\mathbf{y}=\mathrm{O} \tag{20}$$

s neznámymi y_0, y_1, y_2 hodnosť najviac 2, a preto existuje (aspoň jeden) koreň $(\bar{y}_0; \bar{y}_1; \bar{y}_2)$ tejto sústavy. Každý takýto koreň je reprezentantom samodružného bodu kolineácie.

Teda algoritmus hľadania samodružných bodov kolineácie je nasledujúci:

1. Rieši sa charakteristická rovnica kolineácie.

2. Ak α je koreň charakteristickej rovnice, dosadí sa α za ϱ do sústavy (14‴), čím sa sústava stane sústavou (20) s netriviálnym koreňom $(y_0; y_1; y_2)$.

3. Každý koreň sústavy (20) je samodružným bodom kolineácie.

Postup pri hľadaní samodružných priamok je s týmto postupom analogický. Rozdiel je v tvare sústavy rovníc pre neznáme súradnice priamok: treba vychádzať zo sústavy (15″).

Existencia koreňov charakteristickej rovnice kolineácie a ich násobnosť závisí od vlastností poľa k. Ak je k algebraicky uzavreté pole charakteristiky rôznej od 2 a 3, všetky korene rovnice sú v k a súčet násobností všetkých koreňov sa rovná 3, t. j. stupňu rovnice. V tomto článku sa neskôr urobí rozbor prípadov $k=\mathbf{R}$ (pole reálnych čísel) a $k=\mathbf{C}$ (pole komplexných čísel).

Závislosť vlastností kolineácie od koreňov jej charakteristickej rovnice opisuje nasledujúca veta.

Veta 5

a) Samodružný bod (samodružná priamka) kolineácie nezávisí od výberu sústavy súradníc, ale len od koreňa charakteristickej rovnice.

b) Rôznymi koreňmi charakteristickej rovnice sú určené rôzne samodružné body (samodružné priamky).

c) Samodružný bod a samodružná priamka určené rôznymi koreňmi charakteristickej rovnice navzájom incidujú.

d) Samodružný bod a samodružná priamka určené tým istým jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice navzájom neincidujú.

e) Ak je viacnásobným koreňom charakteristickej rovnice určený jediný samodružný bod, a teda aj jediná samodružná priamka, tieto samodružné prvky navzájom incidujú.

Dôkaz týchto tvrdení môže čitateľ získať úpravou dôkazov v [3] na s. 52—53 a 54—57.

Príklad 2. Samodružné body a samodružné priamky kolineácie.
Je daná kolineácia

$$x'_0 = x_0 + x_1\,; \qquad x'_1 = 8x_0 + 3x_1\,; \qquad x'_2 = x_0 + x_1 + 2x_2\,.$$

Nájsť samodružné body a samodružné priamky tejto kolineácie.

Riešenie

1. Charakteristická rovnica kolineácie je

$$\mathbf{D}(\varrho) = \begin{vmatrix} 1-\varrho & 1 & 0 \\ 8 & 3-\varrho & 0 \\ 1 & 1 & 2-\varrho \end{vmatrix} = (2-\varrho)\,(\varrho^2 - 4\varrho - 5) = 0$$

Jej korene sú: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = -1$. Všetky korene sú jednoduché, takže hodnosť matice $\mathbf{D}(\alpha_i)$ pre každé $i = 1, 2, 3$ sa rovná 2. Každým koreňom α_i je teda určený jediný samodružný bod a jediná samodružná priamka.

2. Súradnice samodružného bodu určeného koreňom $\alpha_1 = 2$ sú určené rovnicami

$$
\begin{aligned}
-y_0 + y_1 &= 0\\
8y_0 + y_1 &= 0\\
y_0 + y_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Všetky netriviálne korene $(0; 0; \lambda)$, $\lambda \neq 0$, tejto sústavy sú reprezentantmi jediného bodu O_2.

Súradnice samodružnej priamky sú určené sústavou

$$
\begin{aligned}
-u_0 + 8u_1 + u_2 &= 0\\
u_0 + u_1 + u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Korene tejto sústavy tvoria triedu $[7; 2; -9]$.

Ostatné samodružné body a samodružné priamky sa dostanú obdobne pomocou koreňov α_2, α_3. Pre α_2 je to bod $[3; 12; 5]$ a priamka $[2; 1; 0]$, pre α_3 bod $[3; -6; 1]$ a priamka $[-4; 1; 0]$.

3. Klasifikácia kolineácií

3.1 Klasifikácia kolineácií

Pod klasifikáciou kolineácií sa rozumie stanovenie všetkých navzájom odlišných typov kolineácií, ktorých rovnice nemožno transformovať na rovnice ktoréhokoľvek iného pomocou nijakej zmeny sústavy súradníc. Tieto typy sú určené počtom samodružných prvkov a vzťahmi incidencie medzi prvkami. Tieto vlastnosti kolineácie závisia v prvom rade od riešiteľnosti charakteristickej rovnice a násobnosti jej koreňov, a teda v konečnom dôsledku od vlastností základného poľa k. Ak je pole k algebraicky uzavreté, počet koreňov charakteristickej rovnice s prihliadnutím na násobnosť je vždy práve tri. Najdôležitejšie vzťahy incidencie závislé od násobnosti koreňov charakteristickej rovnice kolineácie opisuje veta 5. Tieto vzťahy však nie sú závislé len od násobnosti koreňa α, ale aj od hodnosti matice $\mathbf{D}(\alpha)$. Pretože korene charakteristickej rovnice i samodružné body a samodružné priamky sú nezávislé od voľby sústavy súradníc (veta 5), je možné vybrať sústavu súradníc tak, aby vyjadrenie kolineácie v tejto sústave súradníc bolo čo najjednoduchšie. Takéto vyjadrenia typov kolineácií sa nazývajú *normálne tvary* typov kolineácií. Podkladom úpravy rovníc kolineácie na normálny tvar je nasledujúca lema.

Lema 1

a) Ak je vrchol $0_i (i \in \{0, 1, 2\})$ sústavy súradníc samodružným bodom kolineácie (5) určeným koreňom α charakteristickej rovnice, platí pre prvky matice $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ kolineácie: $b_{ij} = 0$ pre $j = 0, 1, 2, j \neq i$; $b_{ii} = \alpha$.

b) Ak je os $o_i (i \in \{0, 1, 2\})$ sústavy súradníc samodružnou priamkou kolineácie (5) určenou koreňom α charakteristickej rovnice, platí pre prvky matice $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ kolineácie: $b_{ji} = 0$ pre každé $j = 0, 1, 2, j \neq i$; $b_{ii} = \alpha$.

Dôkaz vyplýva napr. pre bod O_0 zo sústavy rovníc (20) platiacich pre súradnice jeho reprezentantov $(\alpha; 0; 0)$ a $(1; 0; 0)$ a napr. pre priamku o_0 zo sústavy rovníc (15′) platiacich pre súradnice jej reprezentantov $(\alpha; 0; 0)$ a $(1; 0; 0)$.

3.2. Klasifikácia kolineácií projektívnej roviny nad poľom komplexných čísel

Všetky koeficienty charakteristickej rovnice sú komplexné čísla. Pole komplexných čísel je algebraicky uzavreté, preto všetky korene rovnice sú komplexné čísla.

Podľa počtu a násobnosti koreňov α_i charakteristickej rovnice a hodnosti matice $\mathbf{D}(\alpha_i)$ nastávajú tieto prípady:

I. Všetky tri korene α_0, α_1, α_2 charakteristickej rovnice sú po dvojiciach navzájom rôzne.

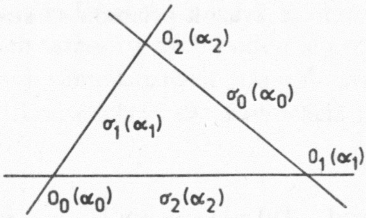
II. Koreň α_1 je jednoduchý, koreň $\alpha_2 = \alpha_3$ dvojnásobný.
   1. Matica $\mathbf{D}(\alpha_2)$ má hodnosť 2.
   2. Matica $\mathbf{D}(\alpha_2)$ má hodnosť 1.

III. Koreň $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ je trojnásobný.

1. Matica $\mathbf{D}(\alpha_1)$ má hodnosť 2.
2. Matica $\mathbf{D}(\alpha_1)$ má hodnosť 1.
3. Matica $\mathbf{D}(\alpha_1)$ má hodnosť 0.

Nájdeme normálne tvary kolineácie určené týmito prípadmi.

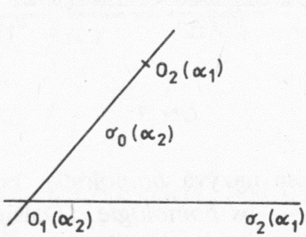
I. Samodružné body určené koreňmi $\alpha_i (i=0, 1, 2)$ si zvolíme za vrcholy O_i sústavy súradníc (*obr. 1*). Podľa lemy 1 má kolineácia vyjadrenie



Obr. 1

$$x'_i = \alpha_i x_i, \quad i=0, 1, 2. \tag{21}$$

II. 1. Jediný samodružný bod, resp. jedinú samodružnú priamku, ktoré sú určené jednoduchým koreňom α_1, a teda neincidujú, si zvoľme za O_2, resp. o_2, jediný samodružný bod, resp. jedinú samodružnú priamku, určené dvojnásobným koreňom α_2 si podľa vety 5 môžeme zvoliť za O_1, resp. o_0 (*obr. 2*). Kolineácia má tvar



Obr. 2

$$
\begin{aligned}
x'_0 &= \alpha_2 x_0 \\
x'_1 &= b_{10} x_0 + \alpha_2 x_1 \\
x'_2 &= \qquad\qquad \alpha_1 x_2 .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Pretože matica $\mathbf{D}(\alpha_2)$ má hodnosť 2, musí byť $b_{10} \neq 0$.

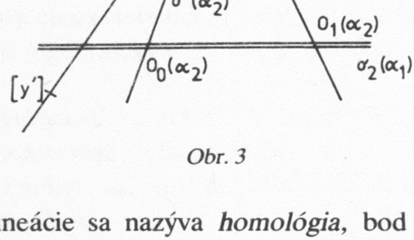
2. Samodružný bod, resp. samodružnú priamku, ktoré sú určené jednoduchým koreňom α_1, si zvolíme za vrchol O_2, resp. os o_2 sústavy súradníc. Množina všetkých samodružných bodov zodpovedajúcich dvojnásobnému koreňu α_2 je priamka o_2 a množina všetkých samodružných priamok určených týmto koreňom je zväzok priamok so stredom O_2. Kolineácia má tvar

$$
\begin{aligned}
x'_0 &= \alpha_2 x_0 \\
x'_1 &= \qquad \alpha_2 x_1 \\
x'_2 &= \qquad\qquad \alpha_1 x_2
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Nesamodružný bod $[y] = [y_0 ; y_1 ; y_2]$ a jeho obraz $[y'] = [\alpha_2 y_0 ; \alpha_2 y_1 ; \alpha_1 y_2]$ incidujú s priamkou

$$y_1 x_0 - y_0 x_1 = 0,$$

ktorá prechádza bodom O_2, a teda je samodružná (*obr. 3*).



Obr. 3

Tento typ kolineácie sa nazýva *homológia*, bod O_2 sa nazýva *stred homológie*, priamka o_2 — *os homológie*. (Ďalšie používané názvy pre tento typ kolineácie sú *perspektívna kolineácia, stredová kolineácia* alebo *osová kolineácia*.)

III. 1. Jediný samodružný bod určený koreňom α_1 si zvolíme za vrchol O_2 sústavy súradníc, jedinú samodružnú priamku, ktorá s O_2 inciduje, si zvolíme za os o_0. Bod $O_0(O_0 \notin o_0)$ nech má obraz Q a priesečník $O_0Q \cap o_0$ si zvoľme za O_1. Kolineácia má tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= \alpha_1 x_0 \\ x_1' &= b_{10}x_0 + \alpha_1 x_1 \\ x_2' &= \qquad\quad b_{21}x_1 + \alpha_1 x_2. \end{aligned} \tag{24}$$

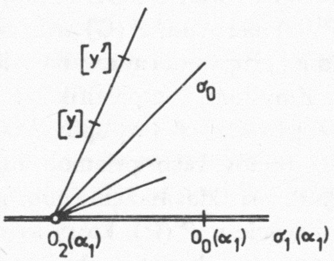
Pretože hodnosť matice $\mathbf{D}(\alpha)$ sa rovná 2, je $b_{10} \neq 0$, $b_{21} \neq 0$.

2. Množina všetkých samodružných bodov je priamka — zvoľme si ju za o_1, množina všetkých samodružných priamok tvorí zväzok so stredom na priamke o_1; tento bod nech je O_2. Kolineácia má tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= \alpha_1 x_0 \\ x_1' &= \qquad \alpha_1 x_1 \\ x_2' &= \qquad b_{21}x_1 + \alpha_1 x_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Pretože hodnosť matice $\mathbf{D}(\alpha_1)$ sa rovná 1, je $b_{21} \neq 0$.

Podobne ako v prípade II.2 pre nesamodružný bod $[y]$ a jeho obraz $[y']$ priamka $[y]\,[y']$ inciduje s bodom O_2, a teda je samodružná (*obr. 4*).



Obr. 4

Tento typ kolineácie sa nazýva *elácia;* bod O_2 sa nazýva *stred elácie,* priamka o_1 — *os elácie.*

3. Hodnosť matice $\mathbf{D}(\alpha_1)$ sa rovná 0, všetky koeficienty sústavy rovníc (20) sa rovnajú nule, každý bod roviny je v kolineácii samodružný,

kolineácia je identické zobrazenie, ktorého normálny tvar je

$$x'_i = x_i, \quad i = 0, 1, 2\,. \tag{26}$$

Jediným typom neidentickej involutórnej kolineácie, t. j. kolineácie φ, pre ktorú $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ je identické zobrazenie, je kolineácia

$$x'_0 = x_0, \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2 \tag{27}$$

To je tzv. *harmonická homológia.*

Cvičenie

7. Dokázať: Pre každý bod $[y]$ projektívnej roviny, ktorý nie je samodružný v harmonickej homológii, je štvorica bodov v poradí — stred homológie, priesečník osi homológie s priamkou $[y]\,[y']$, bod $[y]$ a jeho obraz $[y']$ v harmonickej homológii — harmonická.

3.3 Klasifikácia kolineácií projektívnej roviny nad poľom reálnych čísel

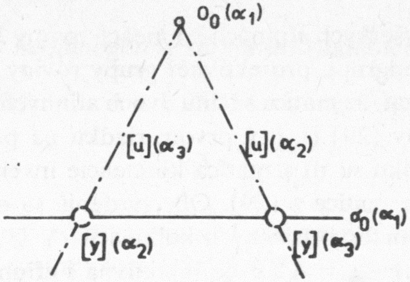
Kolineáciami roviny $P^2(\mathbf{R})$ sú všetky transformácie tvaru (5), pri ktorých aspoň v jednej matici $\varrho\mathbf{B}$ všetky prvky b_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$ sú reálne čísla. Zrejme platí: $P^2(\mathbf{R}) \subset P^2(\mathbf{C})$ a $PGL\,(2\,;\mathbf{R}) \subset PGL\,(2\,;\mathbf{C})$.

Rozšírenie roviny $P^2(\mathbf{R})$ na rovinu $P^2(\mathbf{C})$ pri súčasnom ponechaní grupy $PGL(2\,;\mathbf{R})$ ako základnej grupy operujúcej na priestore je tzv. *komplexifikácia* roviny $P^2(\mathbf{R})$. Zmyslom komplexifikácie je zaručiť geometrickú interpretáciu takých algebraických postupov, vo výsledkoch ktorých sa objavujú ako súradnice bodov, resp. priamok imaginárne čísla. Využitie komplexifikácie sa ukáže pri klasifikácii kolineácií v $P^2(\mathbf{R})$.

Jediný nový typ kolineácie v $P^2(\mathbf{R})$, ktorý sa nevyskytuje v $P^2(\mathbf{C})$, je určený nasledujúcim prípadom koreňov charakteristickej rovnice.

I.2. Koreň α_1 je reálne číslo, korene α_2, α_3 sú navzájom združené imaginárne čísla ([4], veta 41.1, s. 367).

Samodružný bod a samodružná priamka určené reálnym koreňom α_1 sú reálne; nech je to O_0, resp. o_0. Samodružné body zodpovedajúce v komplexifikácii roviny $P^2(\mathbf{R})$ koreňom α_2, α_3 incidujú s osou o_0, samodružné priamky určené koreňmi a_2, α_3 v komplexifikácii roviny indidujú s O_0 (*obr. 5*).



Obr. 5

Keď $\alpha_2 = a + bi$, $\alpha_3 = \bar{\alpha}_2 = a - bi$, kde a, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$, kolineácia má normálny tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= \alpha_1 x_0 \\ x_1' &= \quad a x_1 + b x_2 \\ x_2' &= \quad -b x_1 + a x_2 . \end{aligned} \tag{28}$$

4. Afinná grupa

Nech je v rovine $P^2(k)$ vybraná pevná priamka, napr. o_0 (rovnica $x_0 = 0$).

Definícia 4. Afinnou kolineáciou (afinnou transformáciou) roviny $P^2(k)$ vzhľadom na priamku o_0 sa nazýva každá kolineácia, v ktorej je priamka o_0 samodružná.

Pre takúto kolineáciu podľa lemy 1 je vo vzťahoch (5) $b_{01} = b_{02} = 0$, $b_{00} \neq 0$ a voľbou $b_{00} = 1$ — čo je oprávnené vzhľadom na homogénnosť prvkov matice $\mathbf{B}$ — vyjadrenie afinnej kolineácie nadobúda tvar

$$\begin{aligned} x_0' &= \quad x_0 \\ x_1' &= b_{10} x_0 + b_{11} x_1 + b_{12} x_2 \\ x_2' &= b_{20} x_0 + b_{21} x_1 + b_{22} x_2 . \end{aligned} \tag{29}$$

$$\mathbf{B} = |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Veta 6. Množina všetkých afinných kolineácií roviny $P^2(k)$ vzhľadom na priamku o_0 tvorí podgrupu projektívnej grupy roviny $P^2(k)$.

Dôkaz. Stačí ukázať, že matica súčinu dvoch afinných kolineácií má tvar matice $\mathbf{B}$ zo vzťahov (29) (t. j. v prvom riadku na prvom mieste je 1, ostatné prvky v riadku sú 0) a matica kolineácie inverznej ku kolineácii (29) má takisto tvar matice z (29). Obe tvrdenia sa dokazujú priamym vyjadrením prvkov matíc príslušných kolineácií.

Podmnožina $P^2(k) - o_0 = A_0^2(k)$ je bijektívna s afinnou rovinou $A^2(k)$ ([1]) a jej zobrazenie afinnou kolineáciou (29) v nehomogénnych súradniciach $x = \dfrac{x_1}{x_0}$, $y = \dfrac{x_2}{x_0}$ má tvar

$$\begin{aligned} x' &= b_{11}x + b_{12}y + b_{10} \\ y' &= b_{21}x + b_{22}y + b_{20}\,, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{29'}$$

Afinná rovina $A_0^2(k)$ doplnená priamkou o_0, ktorá sa nazýva *nevlastnou priamkou* roviny $P^2(k)$ vzhľadom na $A_0^2(k)$, sa nazýva *rozšírenou afinnou rovinou* a je modelom projektívnej roviny $P^2(k)$; označuje sa $\overline{A_0^2(k)}$. Body roviny $A_0^2(k)$ sa nazývajú *vlastnými*, body priamky o_0 *nevlastnými bodmi* rozšírenej afinnej roviny $\overline{A_0^2(k)}$. Nevlastné body sa označujú znakom ∞ vľavo dolu od označenia bodu, napr. ${}_\infty A$, ${}_\infty B$ atď. Afinné transformácie (29′) sú pre rovinu $A_0^2(k)$ charakteristické a možno ich chápať ako zúženia zobrazení (29) na rovinu $A_0^2(k)$. V takom chápaní sa nazývajú *afinnými transformáciami (afinitami) afinnej roviny* $A_0^2(k)$ a grupa, ktorú tvoria, sa nazýva *afinnou grupou* afinnej roviny nad poľom k. V takomto ponímaní afinná grupa už nie je podgrupou projektívnej grupy, ale je len izomorfná s každou grupou afinných kolineácií roviny $P^2(k)$ vzhľadom na ľubovoľnú priamku $l \in P^2(k)$. Preto je účelnejšie a aj pre iné metodické a výpočtové dôvody vhodnejšie chápať afinnú grupu ako grupu afinných kolineácií roviny $P^2(k)$ vzhľadom na vybranú pevnú priamku.

Poznámka 1. Ak $T(t_1; t_2)$, $U(u_1; u_2)$, $V(v_1; v_2)$ sú tri po dvojiciach navzájom rôzne vlastné body priamky p s vhodným pevným parametrickým vyjadrením jej sústavy bodov a $t_1 u_1 v_1 \neq 0$, podiely $t = \dfrac{t_2}{t_1}$, $u = \dfrac{u_2}{u_1}$,

$v = \frac{v_2}{v_1}$ sa nazývajú *nehomogénne súradnice (parametre)* bodov T, U, V na priamke p. Podiel

$$(tuv) = \frac{v - t}{v - u}$$

sa nazýva *podielový pomer* usporiadanej trojice bodov T, U, V na priamke v afinnej rovine; označuje sa (TUV).

Poznámka 2. Dve priamky rozšírenej afinnej roviny so spoločným nevlastným bodom sa nazývajú *rovnobežné priamky* afinnej roviny.

Dôležitú vlastnosť afinnej roviny vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 7. Podielový pomer a rovnobežnosť priamok sú invarianty afinnej roviny vzhľadom na afinnú grupu.

Cvičenia

8. Nech ${}_{\infty}P$ je nevlastný bod rozšírenej priamky $\bar{p}$ v rozšírení afinnej roviny. Dokázať platnosť rovnosti $(TUV) = (TUV{}_{\infty}P)$.

9. Dokázať vetu 7.

Úplnú klasifikáciu afinných transformácií možno získať špecializovaním všetkých typov kolineácií voľbou samodružnej priamky kolineácie za nevlastnú priamku.

5. Ekviformná grupa. Metrická grupa

1. V projektívnej rovine $P^2(\mathbf{P})$ sa zvolí pevná sústava súradníc. V afinnej rovine $A^2(\mathbf{C}) = P^2(\mathbf{C}) - o_0$ sa definuje kolmosť dvojíc priamok.

Definícia 5. Priamky $[u] = [u_0; u_1; u_2]$, $[v] = [v_0; v_1; v_2]$ roviny $A^2(\mathbf{C})$ sa nazývajú *navzájom kolmé* práve vtedy, keď

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0\,. \tag{30}$$

Z priamkových súradníc u_1, u_2 priamky [u] je aspoň jedna rôzna od nuly; nech je to napr. u_2. Podiel $k_u = -\frac{u_1}{u_2}$ sa nazve *smernica* priamky $[u]$.

Ak je definovaná aj smernica $k_v = -\frac{v_1}{v_2}$ priamky $[v]$, podmienka (30) kolmosti priamok má tvar

$$1 + k_u k_v = 0. \tag{30'}$$

Afinná rovina, v ktorej je definovaná kolmosť priamok, sa nazýva *rovina s ortogonálnou geometriou* ([5]). *Rozšírenou afinnou rovinou s ortogonálnou geometriou* sa nazýva rovina s ortogonálnou geometriou doplnená nevlastnou priamkou; označíme ju $\overline{A_0^2(\mathbf{C})}$. Pre nevlastnú priamku pojem kolmosti nemá zmysel.

2. Pre každú priamku $[u] = [u_0;\ u_1;\ u_2]$ roviny $\overline{A_0^2(\mathbf{C})}$ incidujúcu s bodom O_0 platí $u_0 = 0$.

Všetky priamky zväzku so stredom O_0 možno parametricky vyjadriť v tvare

$$(w) = h_1(u) + h_2(v),\ (h_1;\ h_2) \neq (0, 0)\ , \tag{31}$$

t. j.

$$w_i = h_1 u_i + h_2 v_i,\ i = 1, 2\ , \tag{31'}$$

kde (u), (v) sú pevné reprezentanty dvoch pevných priamok zväzku so stredom O_0. $[h_1;\ h_2]$ je dvojica (homogénnych) parametrov priamky $[w]$ vzhľadom na základné priamky $[u]$, $[v]$.

Dvojpomer štvorice priamok zväzku je pomocou parametrov definovaný obdobne ako dvojpomer štvorice bodov na priamke.

Ak sa za základné priamky zvolia $o_1 = [0;\ 1;\ 0]$ a $o_2 = [0;\ 0;\ 1]$, je priamka $[u] = [0;\ u_1;\ u_2]$ určená dvojicou parametrov $[u_1;\ u_2]$.

3. Zobrazenie ω vo zväzku priamok so stredom O_0 a základnými priamkami o_1 a o_2 definované priradením $[h_1;\ h_2] \mapsto [h_1';\ h_2']$ podľa vzťahov

$$h_1' = -h_2,\ h_2' = h_1 \tag{32}$$

pre každú dvojicu parametrov $[h_1;\ h_2]$

a) zobrazuje každú priamku $[0;\ h_1;\ h_2]$ zväzku na kolmú priamku $[0; -h_2;\ h_1]$;

b) je involutórne, t. j. $\omega \circ \omega = \omega^2$ je identické zobrazenie vo zväzku.

Zobrazenie ω sa nazýva *pravouhlá involúcia vo zväzku priamok* so stredom v bode O_0 alebo skrátene *pravouhlá involúcia* v bode O_0.

S výnimkou priamky o_1 má každá priamka zväzku so stredom O_0 smernicu $t = -\frac{h_1}{h_2}$. Pravouhlá involúcia v bode O_0 je potom pre každú priamku okrem priamky o_1 a jej obrazu o_2 vyjadrená vzťahom

$$t' = -\frac{1}{t}. \tag{32'}$$

(t' je smernica obrazu priamky so smernicou t).

4. V pravouhlej involúcii ω priamky o_1 a o_2 nie sú samodružné, lebo tvoria involutórnu dvojicu rôznych priamok. Smernice samodružných priamok sú korene rovnice

$$t = -\frac{1}{t}, \tag{33}$$

t. j.

$$t^2 = -1, \tag{33'}$$

t. j. $t = i$ a $t = -i$. Samodružné priamky involúcie ω sú teda priamky $[0; 1; i]$ a $[0; 1; -i]$; sú to tzv. *izotropické priamky* v bode O_0.

Poznámka. Pravouhlú involúciu a izotropické priamky možno umiestniť do ľubovoľného vlastného bodu roviny. Smernice priamok, vzťah kolmosti a smernice samodružných priamok sa tým nezmenia.

5. Priesečníky všetkých involutórnych dvojíc $[u_0; u_1; u_2]$, $[u_0'; -u_2; u_1]$ pravouhlej involúcie v ľubovoľnom vlastnom bode roviny s nevlastnou priamkou o_0 tvoria involutórne dvojice bodov $[0; -u_2; u_1]$, $[0; u_1; u_2]$ tzv. *absolútnej involúcie* roviny $\overline{A_o^2(\mathbf{C})}$. Samodružné body tejto involúcie sú priesečníky $[0; -i; 1]$ a $[0; i; 1]$ izotropických priamok s nevlastnou priamkou. Body $[0; -i; 1]$ a $[0; i; 1]$ sa nazývajú *kružnicové body* roviny.

6. Pre dvojpomer δ involutórnej dvojice pravouhlej involúcie so smernicami t, $-\frac{1}{t}$ a izotropických priamok platí

$$\delta = \left(t, -\frac{1}{t}, i, -i\right) = \frac{i-t}{i+\frac{1}{t}} : \frac{-i-t}{-i+\frac{1}{t}} = -1. \tag{34}$$

Pre dvojpomer d ľubovoľnej dvojice priamok zväzku so smernicami k, k' a izotropických priamok platí

$$d = (k, k', i, -i) = \frac{kk' - i\,(k'-k) + 1}{kk' + i\,(k'-k) + 1}. \tag{35}$$

(Dvojpomer vyjadrený pomocou nehomogénnych súradníc (parametrov) sa získa podľa definície 2 (výraz (9)) prechodom od homogénnych súradníc k nehomogénnym.)

Podľa vety analogickej k vete 2 je dvojpomer štvorice priamok zväzku projektívny invariant.

7. Veľkosť uhla dvoch vlastných priamok so smernicami k, k' sa definuje takto:

$$\varphi = \frac{1}{2}\, i \log d. \tag{36}$$

Poznámka 1. Z projektívnej invariantnosti dvojpomeru d vyplýva projektívna invariantnosť veľkosti uhla φ, samozrejme, odhliadnuc od známej mnohoznačnosti funkcie $\log d$ ([6], s. 184—185).

Poznámka 2. Pre navzájom kolmé priamky je $d = -1$ a základná veľkosť uhla týchto priamok je $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Poznámka 3. Pre priamky, ktoré nie sú navzájom kolmé, z (35) a (36) vyplýva

$$d = e^{-2i\varphi} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \frac{\cos\varphi - i.\sin\varphi}{\cos\varphi + i.\sin\varphi} = \frac{1 - i.\operatorname{tg}\varphi}{1 + i.\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{kk' - i\,(k'-k) + 1}{kk' + i\,(k'-k) + 1} = \frac{1 - i.\dfrac{k'-k}{1+kk'}}{1 + i.\dfrac{k'-k}{1+kk'}},$$

odkiaľ

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k'-k}{1+kk'}\,. \tag{37}$$

Vzťah (37) známy z analytickej geometrie euklidovskej roviny poukazuje na dôvod zavedenia projektívnej definície uhla vzťahom (36).

8. *Definícia 6. Ekviformnou* (podobnostnou) *transformáciou* rozšírenej afinnej roviny s ortogonálnou geometriou $A_o^2(\mathbf{C})$ sa nazýva každá afinná transformácia tejto roviny zobrazujúca každú dvojicu vlastných priamok zvierajúcich uhol veľkosti φ do dvojice priamok zvierajúcich uhol veľkosti $\pm\varphi$.

Veta 8. Ekviformnými transformáciami roviny $\overline{A_o^2(\mathbf{C})}$ sú práve všetky afinné transformácie, v ktorých je invariantná dvojica kružnicových bodov.

Dôkaz. Nech afinná transformácia (29′) je ekviformnou transformáciou. (Stačí brať do úvahy afinnú rovinu, pretože nevlastnej priamky sa pojem uhla netýka.)

Osi $o_1=x=[0;1;0]$ a $o_2=y=[0;0;1]$ sústavy súradníc sú navzájom kolmé. Ľubovoľná dvojica p', q' priamok prechádzajúcich bodom $O_0=O$ rôznych od x s priamkovými súradnicami $p'=[0;-k;1]$ a $q'=$ $=[0=-k';1]$, t. j. dvojica priamok s rovnicami

$$y=kx,\; y=k'x \tag{38}$$

zviera uhol, pre ktorého veľkosť φ $\left(\text{predbežne nech } \varphi\neq\frac{\pi}{2}\right)$ podľa (37) platí

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k'-k}{1+kk'}\,.$$

Vzory p, q priamok p', q' v transformácii (29′) sú priamky s rovnicami

$$(b_{21}-kb_{11})x+(b_{22}-kb_{12})y+(b_{20}-kb_{10})=0$$

$$(b_{21}-k'b_{11})x+(b_{22}-k'b_{12})y+(b_{20}-k'b_{10})=0 \tag{39}$$

Pre veľkosť ψ uhla priamok p, q podľa (37) platí

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{(k'-k)\,(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}{kk'(b_{11}^2+b_{12}^2)-(k+k')\,(b_{11}b_{21}+b_{12}b_{22})+(b_{21}^2+b_{22}^2)} \tag{40}$$

Pre základné veľkosti uhlov platí $\psi=\pm\varphi$ práve vtedy, keď $\operatorname{tg}\psi=$ $=\pm\operatorname{tg}\varphi$, čo podľa (37) a (40) po úprave dáva

$$\pm(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\,(1+kk')-(b_{11}^2+b_{12}^2)\,kk'+$$
$$+(b_{11}b_{21}+b_{12}b_{22})\,(k+k')-(b_{21}^2+b_{22}^2)=0. \tag{41}$$

Rovnica (41) je splnená identicky, čo je ekvivalentné so sústavou podmienok

$$\begin{aligned} &b_{11}^2+b_{12}^2\mp b_{11}b_{22}\pm b_{12}b_{21}=0\\ &b_{21}^2+b_{22}^2\mp b_{11}b_{22}\pm b_{12}b_{21}=0\\ &b_{11}b_{21}+b_{12}b_{22}=0. \end{aligned} \tag{42}$$

Z poslednej podmienky vyplýva

$$b_{22}=\varrho b_{11},\ b_{21}=-\varrho b_{12} \tag{43}$$

s $\varrho\neq 0$; to dosadené do prvých dvoch podmienok dáva

$$(b_{11}^2+b_{12}^2)\,(1\mp\varrho)=0,\quad \varrho(1\mp\varrho)\,(b_{11}^2+b_{12}^2)=0. \tag{44}$$

Ľahko sa ukáže, že $b_{11}^2+b_{12}^2\neq 0$; v opačnom prípade by sa anuloval determinant transformácie (29′). Z toho ďalej vyplýva $b_{11}\pm i\,.\,b_{12}\neq 0$. Zo (44) vyplýva $\varrho=\pm 1$, odkiaľ

$$b_{22}=\pm b_{11},\ b_{21}=\mp b_{12}\,. \tag{45}$$

Teda ekviformné sú práve afinné transformácie vyjadrené v sústave súradníc s navzájom kolmými osami rovnicami

$$\begin{aligned} x'&=b_{11}x+b_{12}y+b_{10}\\ y'&=\mp b_{12}x\pm b_{11}y+b_{20} \end{aligned} \tag{46}$$

s vlastnosťou $b_{11}^2+b_{12}^2\neq 0$. Je zrejmé, že tieto transformácie zachovávajú aj pravý uhol.

Pomocou vyjadrenia transformácie (46) v sústave homogénnych súradníc sa ako korene charakteristickej rovnice dostanú hodnoty $\alpha_1=1$, $\alpha_2=b_{11}+i\,.\,b_{12}$, $\alpha_3=b_{11}-i\,.\,b_{12}$. Samodružnými bodmi príslušnými k dvojici koreňov α_2, α_3 sú kružnicové body $[0;1;i]$ a $[0;1;-i]$.

V transformácii (46), pre ktorú koeficienty majú horné znamienka, je každý z týchto bodov samodružný; keď platia dolné znamienka, kružnicové body sa navzájom vymieňajú ako vzor a obraz. Prvý prípad je *súhlasná podobnosť*, druhý prípad — *nesúhlasná podobnosť.*

(42)—(45) vyjadrujú nevyhnutné aj dostačujúce podmienky pre ekviformnosť transformácie.

Bezprostredným výpočtom možno overiť, že transformácie tvaru (46) tvoria grupu; je to tzv. *ekviformná grupa*. Afinná rovina s ekviformnou grupou transformácií sa nazýva *ekviformná rovina*.[1]

9. V ekviformnej rovine možno zaviesť metriku.

V sústave súradníc s navzájom kolmými osami x, y nech ľubovoľné body P_1, P_2 majú súradnice $[x_1; y_1]$, resp. $[x_2, y_2]$.

Definícia 7. Vzdialenosťou bodov P_1, P_2 sa nazýva hodnota

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)\,\overline{(x_2 - x_1)} + (y_2 - y_1)\,\overline{(y_2 - y_1)}}.$$

Poznámka 1. Zo (47) je zrejmé, že d je nezáporné reálne číslo.

Poznámka 2. Pre body s reálnymi súradnicami je

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{47'}$$

čo je v zhode so známou definíciou vzdialenosti v euklidovskej rovine.

Definícia 8. Metrickou transformáciou (izometrickou transformáciou, izometriou, zhodným zobrazením) sa nazýva každá ekviformná transformácia φ, vzhľadom na ktorú je invariantná vzdialenosť každých dvoch bodov, t. j. pre ktorú platí

$$d\,(P_1, P_2) = d\,(\varphi(P_1), \varphi(P_2)) \tag{48}$$

pre každé dva body P_1, P_2 roviny $A^2(\mathbf{C})$.

Veta 9. Metrickými transformáciami roviny $A^2(\mathbf{C})$ sú práve tie ekvi-

---

[1] V prípade, keď základným poľom je pole reálnych čísel $\mathbf{R}$, pojem ekviformná rovina je totožný s pojmom rovina s ortogonálnou geometriou.

formné transformácie tvaru (46), pre ktoré

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} = \pm 1 .$$

Dôkaz. Podľa (47) a (46) platí — ak $\varphi(P_1) = [x'_1 ; y'_1]$, $\varphi(P_2) = [x'_2 ; y'_2]$, potom

$$\begin{aligned} &(x'_2 - x'_1)\,\overline{(x'_2 - x'_1)} + (y'_2 - y'_1)\,\overline{(y'_2 - y'_1)} = \\ &= (x_2 - x_1)\,\overline{(x_2 - x_1)} + (y_2 - y_1)\,\overline{(y_2 - y_1)} \end{aligned} \tag{49}$$

čiže

$$\begin{aligned} &\pm (b_{11}^2 + b_{12}^2)\,(x_2 - x_1)\,\overline{(x_2 - x_1)} + (y_2 - y_1)\,\overline{(y_2 - y_1)} = \\ &= (x_2 - x_1)\,\overline{(x_2 - x_1)} + (y_2 - y_1)\,\overline{(y_2 - y_1)}. \end{aligned} \tag{50}$$

Nevyhnutnou a dostačujúcou podmienkou platnosti (50) je

$$b_{11}^2 + b_{12}^2 = \pm 1. \tag{51}$$

Je zrejmé, že všetky metrické transformácie ekviformnej roviny tvoria grupu; je to tzv. *metrická grupa.*

Afinná rovina s metrickou grupou sa nazýva *metrická rovina.*

10. Metrická rovina nad poľom reálnych čísel je známa *reálna euklidovská rovina.* Prvkami metrickej grupy tejto roviny sú napr. *osová súmernosť* podľa osi x

$$x' = x,\ y' = -y ; \tag{52}$$

posúvanie o orientovanú úsečku $OA(A[a ; b],\ A \neq O)$

$$x' = x + a,\ y' = y + b ; \tag{53}$$

otáčanie okolo začiatku sústavy súradníc O o uhol veľkosti α

$$\begin{aligned} x' &= x \,.\cos \alpha + y \,.\sin \alpha \\ y' &= -x \,.\sin \alpha + y \,.\cos\alpha \,. \end{aligned} \tag{54}$$

Literatúra

[1] Čižmár, J.: Algebraické krivky I. Matematické obzory 14, str. 5—22. Bratislava 1979.
[2] Mac Lane, S.—Birkhoff, G.: Algebra. ALFA Bratislava 1973.
[3] Bydžovský, B.: Úvod do algebraické geometrie. JČMF Praha 1948.
[4] Kořínek, V.: Základy algebry. ČSAV Praha 1953.
[5] Artin, E.: Geometričeskaja algebra. Nauka Moskva 1969 (preklad z angličtiny).
[6] Privalov, I. I.: Analytické funkce. ČSAV Praha 1955 (preklad z ruštiny).