O RIEŠENÍ ROVNÍC TRETIEHO A ŠTVRTÉHO STUPŇA POMOCOU CYKLICKÝCH DETERMINANTOV

MARIÁN GNOTH, Nitra

Cieľom tohto článku je poukázať na to, ako možno v určitých prípadoch riešiť rovnice tretieho a štvrtého stupňa pomocou metódy cyklických determinantov.

Ako je známe, algebrickú rovnicu n-tého stupňa (n je prirodzené číslo)

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

možno substitúciou

$$x = y - \frac{a_1}{n} \tag{2}$$

previesť na tvar

$$y^n + b_2 y^{n-2} + b_3 y^{n-3} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0 \tag{3}$$

kde a_i pre $i = 1, 2, \ldots, n$, resp. b_j pre $j = 2, 3, \ldots, n$ sú reálne čísla.

Pri hľadaní koreňov tejto rovnice (3) možno výhodne použiť vlastnosti cyklických determinantov. Cyklický determinant, ako je známe, definuje sa takto:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

kde prvky $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sú z telesa reálnych, resp. komplexných čísel.

Je to determinant prislúchajúci štvorcovej matici typu n/n (n — prirodzené číslo). Prvý riadok, základný, obsahuje n prvkov $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (nemusia byť navzájom rôzne) písaných aj v tomto poradí; druhý riadok vznikne cyklickou permutáciou prvého riadku — začína sa prvkom

a_{n-1}, ktorý vystupuje ako posledný v prvom riadku, a pokračuje v poradí prvkov prvého riadku, t. j. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ až a_{n-2}; tretí riadok sa začína posledným prvkom druhého riadku, t. j. a_{n-2}, a pokračuje prvkami v poradí $a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}$, ako sú písané v druhom riadku; všeobecne k-tý riadok vznikne cyklickou permutáciou $(k-1)$-ého riadku — na prvom mieste je prvok a_{n-k+1} a na ďalších miestach sú umiestnené prvky k-tého riadku v takom istom slede ako v k-tom riadku, len prislúchajúce prvky v $(k+1)$-om riadku sú posunuté o jeden stĺpec doprava. Všeobecne prvky cyklického determinantu umiestnené pod hlavnou diagonálou možno charakterizovať rovnosťou

$$a_{k,k-1} = a_{k+1,k}$$

pre všetky prirodzené čísla $k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$ a prvky umiestnené nad hlavnou diagonálou zase rovnosťou

$$a_{k,k+1} = a_{k+1,k+2}$$

pre všetky prirodzené čísla $k = 1, 2, 3, \ldots, n-2$. Z názoru vidieť, že prvky umiestnené v smere hlavnej diagonály sú rovnaké.

Cyklický determinant má tú vlastnosť, že ho môžeme vyjadriť ako súčin n faktorov s n sčítancami. Všeobecne to môžeme zapísať:

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{2k} \cdot \ldots \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{(n-1)k} \qquad (4)$$

kde $w, w^2, w^3, \ldots, w^n$ sú korene binomickej rovnice

$$w^n = 1$$

pre ktoré platia vzťahy [1]:

$$w^{n+1} = w, \quad w^{n+2} = w^2, \quad \ldots, \quad w^{n+k} = w^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Túto vlastnosť cyklických determinantov možno s výhodou použiť pri riešení rovníc tretieho a štvrtého stupňa. Metóda postupu je nasledujúca:

Danú rovnicu (kubickú, resp. bikvadratickú) substitúciou (2) upravíme na tvar (3). K rovnici (3) výpočtom určíme cyklický determinant Δ_3, resp. Δ_4, pretože podľa vzťahu (4) budeme vedieť danú rovnicu rozložiť na súčin troch, resp. štyroch koreňových činiteľov. Z tohto rozkladu sa potom dajú určiť korene danej rovnice. V prípade, keď v kubickej rovnici chýba kvadratický člen, resp. v bikvadratickej kubický člen, možno priamo bez použitia substitúcie (2) prejsť k hľadaniu cyklického determinantu, ktorý prislúcha danej rovnici.

Napríklad ak uvažujeme rovnicu tretieho stupňa tvaru

$$x^3 + 3ax + 2b = 0$$

kde a, b sú reálne čísla, pri jej riešení postupujeme takto:

Danej rovnici bude prislúchať cyklický determinant tretieho stupňa Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x & m & n \\ n & x & m \\ m & n & x \end{vmatrix} = x^3 - 3mnx + m^3 + n^3$$

Tento determinant môžeme rozložiť podľa vzťahu (4) na súčin troch činiteľov:

$$\Delta_3 = (x + m + n) \cdot (x + mw + nw^2) \cdot (x + mw^2 + nw^4)$$

Podľa toho naša rovnica bude mať korene:

$$x_1 = -(m + n) \qquad x_2 = -(mw + nw^2) \qquad x_3 = -(mw^2 + nw^4)$$

kde w je riešením rovnice

$$w^3 = 1$$

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

Pre w platia vzťahy:

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \quad \text{(je tiež koreň rovnice } w^3 = 1\text{)}$$

$$w^4 = w$$

$$1 + w + w^2 = 0$$

Potrebujeme vypočítať ešte neznáme m a n. Vypočítame ich takto:

Ak porovnáme koeficienty danej rovnice s koeficientmi vystupujúcimi v číselnom vyjadrení cyklického determinantu Δ_3 pri rovnakých mocninách x, dostávame:

$$m \cdot n = -a \qquad m^3 + n^3 = 2b$$

Vylúčením jednej neznámej, napr. n z daných rovníc vyplýva:

$$m^6 - 2bm^3 - a^3 = 0$$

Substitúciou $m^3 = u$ dostaneme kvadratickú rezolventu

$$u^2 - 2bu - a^3 = 0$$

ktorej korene sú:

$$u_1 = b + \sqrt{b^2 + a^3} \qquad u_2 = b - \sqrt{b^2 + a^3}$$

Keďže $u_1^3 = m^6$, $u_2^3 = m^6$, na základe vlastností koreňov kvadratickej rovnice

$$u_1 \cdot u_2 = -a^3$$
$$u_1 + u_2 = 2b$$

Vzhľadom na substitúciu $m^3 = u$ dostávame tieto rovnice pre neznámu m:

$$m^3 = b + \sqrt{b^2 + a^3} \qquad m^3 = b - \sqrt{b^2 + a^3}$$

Riešením týchto rovníc dostávame 6 hodnôt (koreňov) pre neznámu m. Jedna dvojica koreňov má tvar:

$$m_1 = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}}, \qquad m_2 = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}}$$

Ďalšie korene sú:

$$m_{1,k} = m_1\left(\cos\frac{2}{3}k\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}k\pi\right)$$

$$m_{2,k} = m_2\left(\cos\frac{2}{3}k\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}k\pi\right)$$

kde $k = 1$, resp. $k = 2$.

Tieto korene môžu byť reálne, resp. komplexné čísla. Rozbor koreňov týchto rovníc nie je predmetom našich úvah. Podstatný pre nás je fakt, že pomocou týchto hodnôt vieme určiť neznámu n z rovníc

$$m \cdot n = -a, \quad m^3 + n^3 = 2b$$

(bude tu opäť 6 koreňov), a teda prvky cyklického determinantu Δ_3, ktorý prislúcha našej rovnici

$$x^3 + 3ax + 2b = 0$$

a jej korene x_1, x_2, x_3.

Ukážeme si ešte praktické použitie metódy cyklických determinantov pri rovniciach štvrtého stupňa. Ak riešime napr. rovnicu

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = 0$$

potom k nej prislúchajúci cyklický determinant štvrtého stupňa je:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x & m & n & p \\ p & x & m & n \\ n & p & x & m \\ m & n & p & x \end{vmatrix}.$$

Číselným vyjadrením determinantu dostaneme:

$$\Delta_4 = x^4 - 2(n^2 + 2mp)x^2 + 4n(m^2 + p^2)x - \\ - (m^2 - p^2)^2 + n^2(n^2 - 4mp)$$

Ak porovnáme teraz ľavú stranu našej rovnice s číselným vyjadrením cyklického determinantu Δ_4, dostávame sériu rovníc:

$$n^2 + 2mp = -1$$

$$n(m^2 + p^2) = -2$$

$$(m^2 - p^2)^2 - n^2(n^2 - 4mp) = -5$$

Postupným riešením týchto rovníc dostaneme tieto číselné hodnoty pre neznáme:

$$m = 1 \quad n = -1 \quad p = -1$$

Cyklický determinant prislúchajúci našej rovnici má teda tvar

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 & -1 \\ -1 & x & 1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

alebo vzhľadom na vzťah (4) ako súčin štyroch faktorov

$$\Delta_4 = (x + 1 - 1 - 1) \cdot (x + w - w^2 - w^3) \cdot (x + w^2 - w^4 - w^6) \cdot$$
$$\cdot (x + w^3 - w^6 - w^9)$$

Výraz w je koreňom binomickej rovnice

$$w^4 = 1$$

a platia preň tieto vzťahy:

$$1 + w + w^2 + w^3 = 0$$

$$w = w^9 = i$$

$$w^2 = w^6 = -1$$

$$w^3 = -i, \quad w^4 = 1$$

So zreteľom na uvedené vzťahy pre Δ_4 môžeme napísať:

$$\Delta_4 = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1 + 2i) \cdot (x + 1 - 2i)$$

alebo

$$\Delta_4 = (x - 1)^2 \cdot (x + 1 + 2i) \cdot (x + 1 - 2i)$$

To je zároveň rozklad našej rovnice na súčin koreňových činiteľov. Z tohto rozkladu môžeme zistiť, že koreňmi našej rovnice sú čísla:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = -1 - 2i, \quad x_4 = -1 + 2i$$

o čom sa možno presvedčiť dosadením do danej rovnice, resp. vynásobením koreňových činiteľov.

Poznámka: Rozšírenie metódy cyklických determinantov na rovnice piateho stupňa a vyšších stupňov nie je možné. Súvisí to s tým, že algebrické rovnice piateho stupňa a vyšších stupňov nie je možné všeobecne riešiť pomocou radikálov. Na túto skutočnosť poukázal už roku 1823 nórsky matematik N. H. Abel a neskôr francúzsky matematik E. Galoise, zakladateľ teórie grúp.

Literatúra

[1] Studnička, F. J.: O řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně pomocí determinantů cyklických, Časopis pro pěstování mathematiky a fyziky, XIII, 1884, vyd. Jednota českých mathematiků, Praha.

[2] MacLane, S.—Birkhoff, G.: Algebra. Alfa Bratislava 1973.