KOMBINATORIKA NA GYMNÁZIU

LADISLAV KOSMÁK, Bratislava

V návrhu experimentálnych učebných osnov matematiky pre gymnáziá je kombinatorika so základnými pojmami teórie pravdepodobnosti zaradená ako prvý tematický celok v 1. ročníku. Za toto netradičné umiestnenie kombinatoriky hovoria najmä tieto skutočnosti:

1° kombinatorika ideálnym spôsobom nadväzuje na matematické učivo základnej školy; dopĺňuje a rozvíja predovšetkým množinové predstavy a poznatky z algebry;

2° téma je pre žiakov na začiatku ich gymnaziálneho štúdia atraktívna vzhľadom na množstvo zaujímavých a živých príkladov;

3° základné kombinatorické pojmy sú potrebné v ďalšom štúdiu; priamo na ne nadväzuje druhá časť kombinatoriky v 2. ročníku a rozsiahla kapitola o pravdepodobnosti v 3. ročníku.

Zmena v postavení kombinatoriky v nových osnovách súvisí s tým, že kombinatorika vyrástla z periférnej oblasti matematiky v plnohodnotnú disciplínu s dôležitými aplikáciami.

Aj spracovanie tohto tematického celku v experimentálnej učebnici je netradičné. Nové poňatie je charakterizované najmä tým, že východiskom je pojem kombinácie a že sa nepoužíva matematická indukcia. Naznačíme teraz matematickú výstavbu úvodnej kapitoly o kombinatorike.

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov $a_1, \ldots, a_n$ je definovaná ako ľubovoľná k-prvková časť n-prvkovej množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$; predpokladáme, že k a n sú nezáporné celé čísla. Počet všetkých kombinácií k-tej triedy z n prvkov označujeme obvyklým symbolom $\binom{n}{k}$. Je užitočné rozoberať niektoré špeciálne prípady.

a) Pretože každá jednoprvková časť danej n-prvkovej množiny je určená prvkom, ktorý obsahuje, platí

$$\binom{n}{1} = n$$

b) Každá množina má jedinú prázdnu podmnožinu a teda

$$\binom{n}{0} = 1$$

c) Pretože n-prvková množina nemá podmnožiny s viac ako n prvkami, platí

$$\binom{n}{k} = 0$$

pre každé $k > n$.

d) Každá k-prvková časť n-prvkovej množiny určuje doplnkovú $(n-k)$-prvkovú časť. Odtiaľ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1}$$

pre ľubovoľné $n \geqq k \geqq 0$.

e) Majme n-prvkovú množinu $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, kde $n \geqq 2$. Každá dvojprvková časť množiny A určuje dve usporiadané dvojice rôznych prvkov. Odtiaľ vidno, že

$$2\binom{n}{2} = n^2 - n$$

lebo karteziánsky súčin $A \times A$ (ktorý má n^2 prvkov obsahuje práve n usporiadaných dvojíc rovnakých prvkov.

Iný postup spočíva v tom, že všetky dvojprvkové časti množiny A rozdelíme do podmnožín podľa nasledujúcej schémy:

$$\begin{array}{l}
\{\{a_1, a_2\},\ \{a_1, a_3\},\ \ldots\ \{a_1, a_n\}\} \\
\{\{a_2, a_3\},\ \{a_2, a_4\},\ \ldots\ \{a_2, a_{n-1}\}\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\{\{a_{n-1}, a_n\}\}
\end{array}$$

V prvej podmnožine je $n-1$ kombinácií, v druhej $n-2$ atď., až v poslednej jediná kombinácia. Teda

$$\binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Dôležitý vzťah

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad (k, n \geqq 0) \tag{2}$$

dokazujeme tak, že kombinácie triedy $k+1$ z $n+1$ prvkov $a_1, \ldots, a_{n+1}$ rozdelíme do dvoch častí: prvá obsahuje práve všetky kombinácie, ktoré obsahujú prvok a_{n+1}, druhá tie, ktoré ho neobsahujú. Každú kombináciu prvého druhu dostaneme tak, že prvok a_{n+1} pripojíme ku vhodnej kombinácii k-tej triedy z prvkov $a_1, \ldots, a_n$; počet kombinácií prvého druhu je teda $\binom{n}{k}$. Počet kombinácií druhého druhu je zrejme $\binom{n}{k+1}$. Odtiaľ vyplýva (2).

Poznámka. Podobnou úvahou možno dokázať všeobecnejšiu kombinatorickú identitu. Nech množina M je zjednotením disjunktných množín A, B, kde A má n prvkov a B má p prvkov, a nech $0 \leqq j \leqq k \leqq n+p$. Potom počet kombinácií k-tej triedy z prvkov množiny M, ktoré obsahujú práve j prvkov z A, je

$$\binom{n}{j}\binom{p}{k-j}$$

Tak dochádzame ku vzťahu

$$\binom{n+p}{k} = \binom{n}{0}\binom{p}{k} + \binom{n}{1}\binom{p}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{p}{0} \tag{3}$$

Špeciálne pre $n = p = k$ platí

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} =$$

$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$

Vzťah (3) možno ďalej zovšeobecňovať.

Rovnosť (2) je základom pre štúdium vlastností Pascalovho trojuholníka. Porovnaním n-tého riadku tohto trojuholníka s riadkom koeficientov v rozvoji $(a+b)^n$ pre niekoľko prvých hodnôt n dochádzame k hypotéze o binomickej vete, ktorú dokazujeme klasickou úvahou: zistíme, koľkými spôsobmi možno vynásobením n dvojčlenov rovných $(a+b)$ dostať člen $a^k b^{n-k}$. Tým máme k dispozícii binomickú vetu s bohatstvom jej dôsledkov.

Ukážeme teraz, ako možno bez indukcie dôjsť k vyjadreniu kombinačných čísel pomocou faktoriálov. Všetky kombinácie k-tej triedy z n prvkov $(1 \leqq k \leqq n)$ možno dostať z kombinácií triedy $k-1$ tak, že k nim pripojíme ľubovoľný prvok z A, ktorý neobsahujú. Takýchto možností je pre každú kombináciu triedy $k-1$ práve $n-(k-1)$, a každú kombináciu k-tej triedy tak dostaneme k-krát. Platí teda základný vzťah

$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} \tag{4}$$

Opakovaným použitím tejto rovnosti dostávame

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= (n-k+1)\binom{n}{k-1} \\ (k-1)\binom{n}{k-1} &= (n-k+2)\binom{n}{k-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1\binom{n}{1} &= n\binom{n}{0} \end{aligned}$$

Odtiaľ po vynásobení týchto rovností vyplýva, že

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k\binom{n}{1}\binom{n}{2} \ldots \binom{n}{k} = n(n-1) \ldots (n-k+1)\binom{n}{0} \ldots \binom{n}{k-1}$$

a po úprave vychádza

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$$

Súčin $1 \cdot 2 \ldots k$ označujeme znakom $k!$; pre $k=0$ definujeme

$$0! = 1$$

Potom

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\, n(n-1) \ldots (n-k+1)\, \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

a teda

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pre všetky $k \geqq 0$, $n \geqq 0$, $n \geqq k$,

Ďalšia kapitola o kombinatorike nasleduje v 2. ročníku, kde sa s použitím matematickej indukcie študujú variácie s opakovaním aj bez opakovania a ako špeciálny prípad permutácie konečných množín.