O HUSTOTE HODNÔT ISTÝCH ARITMETICKÝCH FUNKCIÍ

JÁN MINÁČ, Bratislava

V tomto článku sa budeme zaoberať aritmetickými funkciami φ a σ. Pre $n>1$ je $\varphi(n)$ počet prirodzených čísel menších ako n, nesúdeliteľných s n a $\varphi(1)=1$; $\sigma(n)$ je súčet všetkých kladných deliteľov čísla n. Tieto funkcie sú pomerne dosť zložité a sú známe mnohé neriešené otázky týkajúce sa týchto funkcií. Preto je prirodzené porovnať tieto funkcie s funkciami jednoduchšími, napr. s funkciami n^{α}. Platia nasledujúce tvrdenia:

a$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^{\alpha}}=0$ pre $\alpha>1$

b$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^{\alpha}}=\infty$ pre $\alpha<1$

c$_1$) množina hodnôt postupnosti

$\left\{\dfrac{\varphi(n)}{n}\right\}_1^{\infty}$ je hustá v intervale $(0; 1)$

a$_2$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{\sigma(n)}=0$ pre $\alpha<1$

b$_2$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{\sigma(n)}=\infty$ pre $\alpha>1$

c$_2$) množina hodnôt postupnosti

$\left\{\dfrac{n}{\sigma(n)}\right\}_1^{\infty}$ je hustá v intervale $(0; 1)$

Pretože $0<\dfrac{\varphi(n)}{n}<1$ a tiež $0<\dfrac{n}{\sigma(n)}<1$, sú vzťahy a$_1$), a$_2$) zrejmé.

Vzťahy b_1), b_2) sa dajú pomerne jednoducho ukázať na základe toho, že funkcie φ, σ sú multiplikatívne. Pripomíname, že aritmetická nenulová funkcia a sa volá multiplikatívna, ak pre každé dve nesúdeliteľné čísla n_1, n_2 platí:

$$a(n_1 \cdot n_2) = a(n_1) \cdot a(n_2)$$

Teraz ukážeme, že platia tvrdenia c_1) a c_2). Dokážeme to na základe nasledujúcej známej vety ([1], Theorem 2).

Veta 1. Nech $a_1 + a_2 + \ldots$ je divergentný rad s kladnými členmi, pre ktoré $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Nech P je ľubovoľné kladné číslo. Potom existuje čiastočný rad daného radu, ktorý konverguje k P.

Ďalej budeme potrebovať nasledujúce rovnosti, ktoré prvý použil L. Euler. V ďalšom p_k označujeme k-te prvočíslo v rastúcej postupnosti všetkých prvočísel.

Veta 2.

1. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{p_k}\right) = 0$

2. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots =$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{p_k^2}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1}$$

Dôkaz. 1. Zo vzorca pre súčet nekonečného geometrického radu máme:

$$\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k^2}} + \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Pretože pre každé k rad na pravej strane rovnosti absolútne konverguje, platí:

$$\prod_{1}^{m} \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} = \sum_{\substack{i_j \geqq 0 \\ 1 \leqq j \leqq m}} \frac{1}{p_1^{i_1}\, p_2^{i_2}\, p_m^{i_m}} > \sum_{k=1}^{p_m} \frac{1}{k}$$

Posledná nerovnosť vyplýva z toho, že každé číslo, nie väčšie ako p_m, sa dá jednoznačne, až na poradie, vyjadriť ako súčin prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Teda

$$\prod_1^m \left(1-\frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{\prod\limits_1^m \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}} < \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{p_m} \frac{1}{k}}$$

Pretože však rad $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{k}$ diverguje, je zrejmé, že rovnosť 1 platí.

2. Podobne ako v 1 dostaneme:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \prod_{k=1}^m \left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)^{-1} < \sum_{n=p_m+1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

Pretože však rad $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje a

$$\prod_{k=1}^m \left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)^{-1} \leqq \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

je nerovnosť 2 zrejmá.

Pristúpime k samotnému dôkazu tvrdení c_1) a c_2). Majme postupnosť $(a_k)_{k=1}^\infty$; $a_k = -\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$. Potom platí:

a) $a_k > 0$

b) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

c) $a_1 + a_2 + \ldots$ je divergentný rad

Tvrdenia a) a b) sú zrejmé. Tvrdenie c) vyplýva z toho, že

$$\sum_1^n a_k = -\sum_1^n \log\left(1-\frac{1}{p_k}\right) = -\log\prod_1^n \left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

a odtiaľ

$$\lim_{n\to\infty} \prod_1^n \left(1-\frac{1}{p_k}\right) = 0$$

Nech teraz (A, B) je ľubovoľný otvorený neprázdny podinterval intervalu $(0, 1)$. Nech $X_0 \in (A, B)$. Potom, pretože e^{-X} je spojitá funkcia a $X_0 = e^{-(-\log X_0)}$, existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $X \in (-\log X_0 - \delta,$

$-\log X_0+\delta)$ je $e^{-x}\in(A, B)$. Podľa vety 1 aplikovanej na postupnosť $\{a_k\}$ však vyplýva, že existuje čiastočný rad $a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots$ *radu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ taký, že konverguje k $-\log X_0$. Teda existuje taký index j_0, že $a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_{j_0}}\in(-\log X_0-\delta,\ -\log X_0+\delta)$, a teda

$$e^{-\sum_{j=1}^{j_0} -\log(1-1/p_{k_j})}=\prod_{j=1}^{j_0}(1-1/p_{k_j})\in(A, B)$$

Pretože

$$\varphi(p_{k_1}p_{k_2}\ldots p_{k_n})=p_{k_1}p_{k_2}\ldots p_{k_n}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_{k_i}}\right)$$

(čo vyplýva napr. z toho, že $\varphi\, p_k=p_k-1$ a φ je multiplikatívna funkcia) je množina hodnôt postupnosti $\left\{\frac{\varphi(n)}{n}\right\}_1^{\infty}$ hustá v intervale (0, 1).

Podobným spôsobom overíme, že množina hodnôt postupnosti $\left\{\frac{n}{\sigma(n)}\right\}_1^{\infty}$ je hustá v intervale (0, 1). Teraz položíme

$$a_k=-\log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p_k}}\right)$$

Podmienky a), b) opäť platia triviálne. Overíme c). Pretože

$$\frac{1}{1+\frac{1}{p_k}}=\frac{1-\frac{1}{p_k}}{1-\frac{1}{p_k^2}}$$

z vety 2 okamžite vyplýva

$$\left(\frac{1}{\sum_{i}^{\infty}\frac{1}{n^2}}>0\right),\quad \text{že}\quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p_k}}\right)=0.$$

To však znamená, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}-\log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p_k}}\right)=\infty.$

Ak znova použijeme vetu 1, dostávame, že v každom neprázdnom podintervale (A, B) intervalu $(0, 1)$ leží prvok v tvare

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p_{k_j}}}\right)=\frac{p_{k_1}p_{k_2}\dots p_{k_n}}{\sigma(p_{k_1}p_{k_2}\dots p_{k_n})}$$

Teda postupnosť $\left\{\frac{n}{\sigma(n)}\right\}_1^\infty$ je hustá v intervale $(0, 1)$.

Poznámka. V skutočnosti sme dokázali viac ako tvrdíme v c_1) a c_2), totiž, že množiny hodnôt funkcií $\frac{\varphi(n)}{n}$ a $\frac{n}{\sigma(n)}$ zúžených na tie prirodzené čísla, ktoré nie sú násobkom žiadneho štvorca prirodzeného čísla rôzneho od jednotky, sú husté v intervale $(0, 1)$.

Literatúra

[1] Benerjee, C. R.—Lahiri, B. K.: On subseries of divergent series. Amer. Math. Monthly, Vol. 77, No. 7, 1964.