O DVOCH ČÍSLACH

MATÚŠ HARMINC, Košice

Vlastnosti prvočísel sú zdrojom veľa rozlične náročných úloh. V prvej časti tohto článku vyriešime dve úlohy, ktoré síce nepatria dôležitosťou k vážnej teórii, ale ich riešenie je peknou ukážkou použitia základných poznatkov o orientovaných grafoch. V druhej časti porozprávame, ako ich riešili žiaci v prvom ročníku gymnázia.[1]

Orientovaným grafom (alebo krátko grafom) nazývame usporiadanú dvojicu konečných množín (V, H), pričom platí $H \subseteq V \times V$; prvky množiny V nazývame vrcholy a prvky množiny H nazývame hrany grafu (V, H). Symbolom $\mathrm{id}(v)$ označujeme počet hrán končiacich sa vo vrchole v a symbolom $\mathrm{od}(v)$ počet hrán začínajúcich sa vo vrchole v. Postupnosť $v_1 h_1 v_2 h_2 \ldots v_n h_n v_{n+1}$, v ktorej sa striedajú vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in V$ s hranami $h_1, h_2, \ldots h_n \in H$, nazývame ťahom dĺžky n, ak pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $h_i = (v_i, v_{i+1})$ a ak $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sú navzájom rôzne hrany.

I

Pri čítaní skripta [2] som v kapitole venovanej deliteľnosti narazil na tento text: „V „slove“ ROKOSAKOČ ktorékoľvek tri po sebe idúce písmená dávajú normálne slovo: rok, oko, kos, osa, sak, ako, koč. Napíšte čo možno najdlhšie číslo, v ktorom každé trojčíslie je prvočíslom, pritom tieto prvočísla sú navzájom rôzne (príklad: 1 131 797)“. O stranu ďalej bolo v komentári: „Deti našli 13-miestne číslo 1 131 797 191 937; najdlhšie mne známe je 44 997 739 719 199 113 173 313 797“. Napadli ma dve otázky: Či neexistuje dlhšie, alebo aspoň väčšie číslo s týmito

[1] Ide o triedu 1.B Gymnázia na Šmeralovej ulici v Košiciach, kde nám umožnili túto problematiku predniesť.

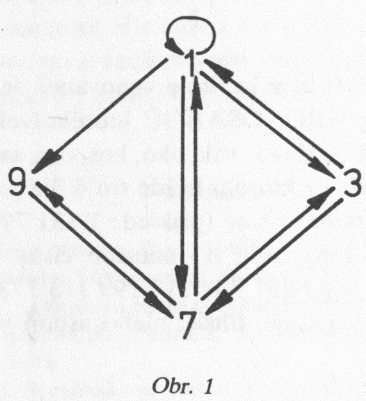
vlastnosťami a či sa úloha nedá ľahko vyriešiť, ak namiesto trojčíslí budeme uvažovať o dvojčísliach.

Zodpovieme najprv druhú otázku.

Úloha 1: Nájdite najväčšie číslo, ktorého každé dvojčíslie je prvočíslo a tieto prvočísla sú navzájom rôzne.

Riešenie: Nula v hľadanom čísle byť nemôže, lebo na začiatku sa nepíše, a ak by bola za nejakou cifrou, tak spolu s touto cifrou by netvorila prvočíslo. Z cifier 2, 4, 5, 6, 8 v hľadanom čísle môže byť najviac jediná, a to na začiatku, v opačnom prípade dvojčíslie končiace sa hociktorou z cifier 2, 4, 5, 6, 8 nie je prvočíslo. Znázornime vrcholmi orientovaného grafu cifry 1, 3, 7, 9 a zostrojme hranu z vrcholu V do vrcholu W práve vtedy, keď VW je prvočíslo. Urobme to pre všetky $V, W \in \{1,3,7,9\}$ (*obr. 1*).

Úloha nájsť číslo, ktorého každé dvojčíslie je prvočíslo, je ekvivalentná s nájdením ťahu v grafe na *obr. 1.* Aby bol ťah čo najdlhší, (t. j. číslo čo najdlhšie), treba začať vo vrchole znázorňujúcom jednotku, prejsť všetky hrany — to sa dá[2] — a skončíme vo vrchole znázorňujúcom deviatku. Ťah tvoríme tak, že v prípade viacerých možností pokračovania vyberáme vrchol znázorňujúci najväčšiu cifru. Od tejto podmienky upúšťame len vtedy, ak hrozí, že niektoré hrany by sme už nemohli zaradiť do



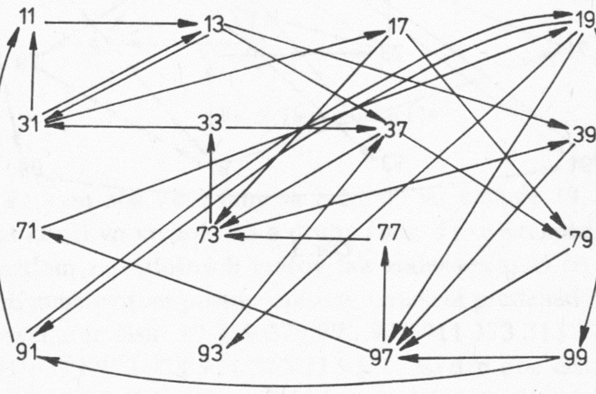
Obr. 1

[2] Existuje eulerovský ťah (pozri [1], [3]).

ťahu (žiadnu hranu nesmieme použiť viac než raz). Vtedy vyberáme najväčšiu prípustnú cifru. Takto dostávame ťah zapísateľný číslom 19 737 131 179. Najväčším nepoužitým dvojciferným prvočíslom končiacim sa na jednotku je 61, takže hľadané číslo je 619 737 131 179.

Úloha 2: Nájdite najväčšie číslo, ktorého každé trojčíslie je prvočíslo, pričom tieto prvočísla sú navzájom rôzne.

Riešenie: Z podobných dôvodov ako v predchádzajúcej úlohe nula môže byť len na druhom mieste hľadaného čísla a cifry 2, 4, 5, 6, 8 sa môžu vyskytnúť len na prvých dvoch miestach. Zostrojme teraz orientovaný graf, ktorého vrcholy sú usporiadané dvojice cifier 1, 3, 7, 9 a orientovanú hranu z vrchola (V_1, V_2) do vrchola (W_1, W_2) veďme práve vtedy, keď $V_2 = W_1$ a $V_1V_2W_2$ je prvočíslo (*obr. 2*)

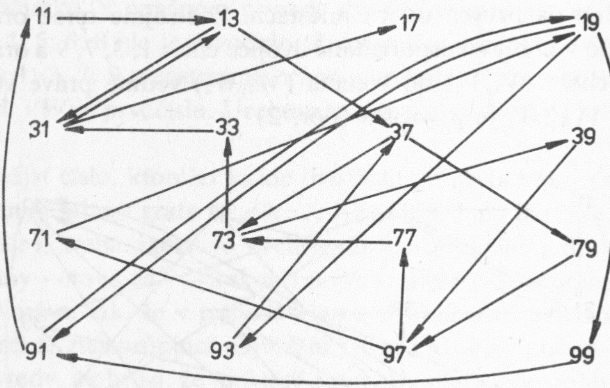


Obr. 2

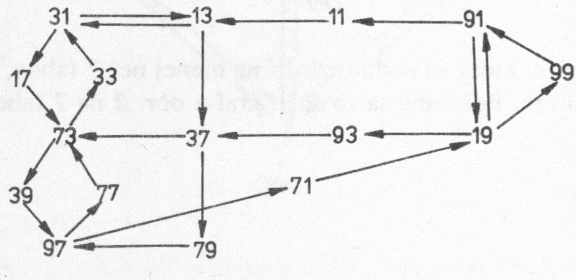
V tomto grafe, ktorý sa nedá rozložiť na menej než 7 ťahov,[3] hľadajme teraz najdlhší ťah. Pokúsme sa rozložiť graf z *obr. 2* na 7 ťahov tak, aby

[3] V opačnom prípade by platilo $\frac{1}{2}\,\Sigma|\mathrm{od}(v) - \mathrm{id}(v)| < 7$, sčítava sa cez všetky vrcholy grafu.

jeden z nich bol najdlhší existujúci ťah, pričom ostatných 6 ťahov je najkratšej možnej dĺžky (t. j. obyčajné hrany). Zrejme žiadna dvojica týchto šiestich hrán netvorí ťah. Náš najdlhší ťah musí prechádzať každým vrcholom v toľkokrát, koľko je min $\{od(v), id(v)\}$, lebo ináč by existoval mimo neho ťah aspoň s dvoma hranami, čo sme vylúčili. Graf na *obr. 3* má len tie hrany, ktoré podľa predchádzajúcej úvahy nevyhnutne musí najdlhší ťah obsahovať.

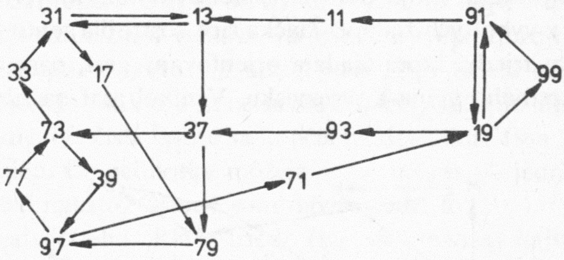


Obr. 3



Obr. 4. Ťah s hranou 173

Keďže hľadaný ťah sa zrejme začne vo vrchole 19, a to jednou z hrán 191, 193 alebo 199, nemôže začať vo vrchole 31 hranou 311, vo vrchole 33 hranou 337, vo vrchole 13 hranou 139, vo vrchole 99 hranou 997 ani hranou 197 vo vrchole 19. Okrem týchto piatich hrán nebude taký ťah obsahovať ešte jednu z hrán 173, 179. Obe možnosti sú znázornené grafmi na *obr. 4* a *5*.



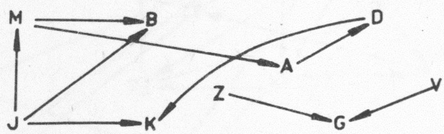
Obr. 5. Ťah s hranou 179

Vidieť, že kým oba tieto ťahy sa začínajú vo vrchole 19, jeden z nich (*obr. 4*) sa končí vo vrchole 73 a druhý (*obr. 5*) vo vrchole 79. Nájdime teraz v každom z príslušných grafov ťah zodpovedajúci čo najväčšiemu číslu. Používame pritom postup opísaný v riešení predchádzajúcej úlohy. Z *obr. 4* vyčítame číslo 19 919 379 773 971 911 373 313 173 a z *obr. 5* číslo 19 919 379 773 971 911 373 313 179. Keďže obe čísla sa začínajú dvojčíslím 19, sú možnosti predĺžiť ich rovnaké, preto budeme predlžovať len väčšie z nich. Pred toto číslo môžeme ešte pridať dve cifry: na druhé miesto 6, 4 alebo 0 a na prvé miesto čo najväčšiu. Začnime deviatkou: 961 nie je prvočíslo, ale už 941 je. Takto zostrojené 28-miestne číslo 9 419 919 379 773 971 911 373 313 179 je najväčším spomedzi všetkých čísel s požadovanými vlastnosťami.

II

Problematiku spomínanú v I. kapitole sme predniesli prvákom—gymnazistom v tesnej časovej nadväznosti za úvodnými partiami teórie grafov.

Žiaci mali vytvorenú intuitívnu definíciu grafu ako konečného alebo so všetkými hranami orientovanými, alebo neorientovanými. Na príkladoch si uvedomili možnosť výhodnejšie riešiť niektoré úlohy pomocou grafu. Po ukončení okruhu problémov o eulerovských ťahoch[4] v orientovaných grafoch som ako domácu úlohu zadal na rozmýšľanie úlohu 1. Ďalšiu hodinu sme začali tak, že som zavolal k tabuli 10 žiakov. Jedna z nich mala na tabuľu napísať začiatočné písmená krstných mien a priezvísk ostatných. Potom som prikázal spojiť tie dve písmená hranou, ktoré tvoria iniciálky niektorého z vybratých žiakov. Žiačka síce zostrojila tento graf, ale až na pripomienku triedy, ktorá žiadala orientovaný graf, nasmerovala každú hranu od krstného mena k priezvisku. Vznikol graf na *obr. 6*.



Obr. 6

Vtedy som dal príklad: Zostavte čo najdlhší rad čakajúcich z týchto deviatich žiakov tak, aby každý nasledujúci mal prvé písmeno krstného mena rovnaké, ako je prvé písmeno priezviska jeho predchodcu. Ešte počas vyznačovania ťahu JMDAK (rad štyroch žiakov) sa ozval z triedy šum a poznámky; vraj to pripomína domácu úlohu, pretože tam tiež bolo treba čo najdlhší rad a tiež vystupovali len dvojice s danou vlastnosťou. Potvrdil som správnosť týchto myšlienok a rozprúdil dražbu výsledkov. Najdlhšie nájdené čísla boli až 13-miestne *D1*: 5 979 173 113 719, 2 311 371 979 173, *C1*: 6 197 113 773 179, samozrejme chybné. Ostatní sa dopracovali „len“ k 12-miestnym číslam:

[4] O eulerovských ťahoch sa možno viac dozvedieť v [1], [3].

D2:	417 371 131 979	*C4*:	617 371 311 979
D3:	613 171 197 379		617 973 711 319
C2:	611 371 973 179		419 731 137 179
C3:	619 731 711 379		619 731 137 179
	611 317 197 379		417 371 311 979
			417 973 711 319

Väčšina riešiacich používala tabuľky a čísla vyrábala opätovným hľadaním prvočísla, ktorého dve cifry sú dané. Potom za najväčšie existujúce číslo s danými vlastnosťami vyhlásili najväčšie z tých, ktoré našli.

Žiak *C3* postupoval takto: „Napísal som si prvočísla od 11 do 97 a zakrúžkoval som si tie, ktoré sa nezačínajú párnym číslom alebo päťkou. Sú zakrúžkované dve čísla, ktoré sa končia na deviatku: 19 a 79; tie som zaradil na koniec. Do jednotky môžem vojsť trikrát — jednotkou som zaradil na druhé miesto. Ostané som dával medzi to“.

C4, autor najväčšieho čísla v triede (nie však naozaj najväčšieho) si zobral za základ číslo 1137 (uvedené ako príklad na predchádzajúcej hodine) a o svojej metóde zaplnenia miest medzi jednotkou na druhom mieste a deviatkou na konci povedal: „Ďalej to išlo samo, len som musel trocha rozmýšľať“. Aj keď celá trieda verí v neexistenciu 13-miestneho čísla s potrebnými vlastnosťami, úvahou ju vylučujú máloktorí. *C3*: „Všetkých zakrúžkovaných prvočísel (pozri *C3* vyššie) je 10, to bude najviac 11-miestne a ešte môže sa pridať len jedno, to bude 12-miestne“. Nikto zo žiakov neskúšal doma riešiť príklad pomocou grafu. Na moju výzvu sa hneď objavili návrhy žiakov, ktorí chceli vyriešiť príklad pomocou grafu na tabuli. S výnimkou *D1*, ktorá chcela ako vrcholy grafu používať dvojmiestne prvočísla zostavené z cifier 1, 3, 7 a 9, všetci ostatní sa zhodli v tom, že graf treba zostrojiť tak, ako je to opísané v autorskom riešení Úlohy 1. Nakoniec z grafu žiaci pomerne ľahko vyčítali hľadané najväčšie číslo, čím si uvedomili výhodu tohto riešenia. Nakoniec som prečítal oba úryvky z [2] a zadal na domáce rozmýšľanie Úlohu 2.

Okrem jedného chybného 30-miestneho čísla žiaci našli dve správne 28-miestne čísla: 7 619 919 113 137 331 739 719 379 773 a 2 419 113 137 331 739 719 919 379 773 a vyše desať 27-miestnych. *C3* riešil úlohu tak, že si vypísal všetky trojciferné prvočísla z cifier 1, 3, 7 a 9 a skúšal ich kombinovať. Navyše v porovnaní s podobným postupom ostatných bol jeho prínosom dôkaz, že hľadané číslo môže byť najviac 34-miestne: „Je

30 prvočísel, to je najviac 32-miestne a ešte dve dopredu, to je najviac 34-miestne“. Pomocou grafu riešil úlohu len $C4$, a to tak, že vrcholy boli jednak cifry 1, 3, 7 a 9 a jednak všetky z nich utvorené dvojciferné čísla. Ak XYZ je trojmiestne prvočíslo také, že $X,Y,Z \in \{1,3,7,9\}$, možno zakresliť do grafu orientované hrany z vrchola X do vrchola (Y,Z) a z vrchola (X,Y) do vrchola Z. Pomocou tohto grafu však našiel len 27-miestne číslo.

Záujem žiakov o vyšetrovanie otázok tejto problematiky nás utvrdil o jej vhodnosti pre matematické krúžky. „Grafársky“ prístup k riešeniu príkladov sa veľmi páčil; je možné ho využiť pri budovaní pojmu izomorfných štruktúr (napr. Úloha 1 a príklad s iniciálkami). Ukázalo sa však, že vyjadrovacie schopnosti žiakov pri formulovaní vlastných myšlienok sú nedostatočné. Je to pravdepodobne preto, lebo počas hodín matematiky nemajú možnosť často vyslovovať svoje názory a úvahy.

Literatúra

[1] Bosák, J.: Grafy a ich aplikácie. Bratislava 1980.

[2] Hejný, M.: Motivačné úlohy z matematiky (Metodický list pre piaty ročník ZŠ), Bratislava 1977.

[3] Sedláček, J.: Úvod do teórie grafů, Academia Praha 1977.