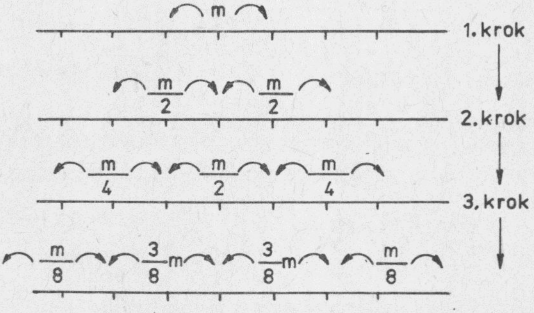
O JEDNEJ KOMBINATORICKEJ ÚLOHE

ANNA BARTKOVÁ, Bratislava

Pri opisovaní konkrétnych situácií môžeme často s výhodou použiť metódy teórie grafov. Na jednoduchej úlohe, ktorá by sa dala zaradiť do rekreačnej matematiky, ukážeme možnosti využitia istých tokov na grafoch.

Majme na priamke rozložené body tak, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch susedných bodov je jednotka. Umiestnime do jedného z bodov m mravcov ($m = 2^r$, $r \in N$). Mravce sa môžu pohybovať len po priamke, a to tak, že za jednu časovú jednotku prejde každý mravec cestu jednotkovej dĺžky. Pohyb (tok mravcov) prebieha postupne v krokoch, ako je znázornené na *obr. 1*.



Obr. 1

V prvom kroku sa mravce rozdelia na dve rovnaké časti. Jedna časť sa premiestni do susedného bodu na jednej strane priamky, druhá do susedného bodu na opačnej strane. Po prvom kroku budú dva body priamky obsadené mravcami. V druhom kroku sa opäť mravce v každom bode rozdelia na dve rovnaké časti. Jedna časť sa presunie do ďalšieho najbližšieho bodu v pôvodnom smere a druhá sa vráti do predchádzajúceho bodu. Tento pohyb spravia mravce v obidvoch bodoch. Po druhom kroku budú tri body priamky obsadené mravcami. Po k-tom kroku bude obsadených $k+1$ bodov priamky. Rozdelenie mravcov je naznačené na *obr. 2.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & m & & & \\
 & & \frac{m}{2} & & \frac{m}{2} & & \\
 & \frac{m}{4} & & \frac{m}{2} & & \frac{m}{4} & \\
\frac{m}{8} & & \frac{3}{8}m & & \frac{3}{8}m & & \frac{m}{8} \\
\binom{3}{0}\frac{m}{2^3} & & \binom{3}{1}\frac{m}{2^3} & & \binom{3}{2}\frac{m}{2^3} & & \binom{3}{3}\frac{m}{2^3}
\end{array}$$

Obr. 2

Počet mravcov na jednotlivých bodoch po určitom kroku nám pripomína čísla Pascalovho trojuholníka. Ak si uvedomíme, že na i-tom bode po k-tom kroku budú mravce, ktoré sa tam dostali z $(i-1)$ a $(i+1)$-vého bodu, a použijeme súčtový vzorec pre kombinačné čísla

$$\binom{m-1}{j-1}+\binom{m-1}{j}=\binom{m}{j}$$

dostaneme výsledok, že na i-tom bode bude po k-tom kroku $\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}$ mravcov ($i = 1, \ldots, k+1$). Situácia po k-tom kroku bude vyzerať takto:

$$\binom{k}{0}\frac{m}{2^k};\ \binom{k}{1}\frac{m}{2^k};\ \ldots;\ \binom{k}{k-1}\frac{m}{2^k};\ \binom{k}{k}\frac{m}{2^k}$$

Takýto pohyb môžeme uvažovať aj na n-uholníku.

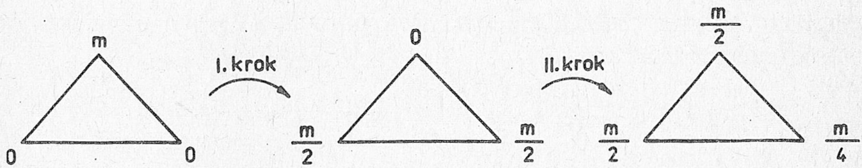
Pri opisovaní toku na n-uholníku využijeme matice susednosti grafu [1], podobné matice, vlastné hodnoty a vlastné vektory matíc [2]. Vlastné hodnoty matice susednosti n-uholníka majú tvar $s_k = 2\cos k2\pi/n$, kde $k = 1, 2, \ldots n$ [3]. Celý dej na n-uholníku možno opísať pomocou vektorov rozdelenia.

Definícia: Majme n-uholník. Nech čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ postupne vyjadrujú počet prvkov (mravcov) na jednotlivých vrcholoch n-uholníka. Potom vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ nazývame vektor rozdelenia n-uholníka.

Nech X' je vektor rozdelenia po nasledujúcom kroku a X vektor rozdelenia po predchádzajúcom kroku, potom platí vzťah $X' = \frac{1}{2} \mathbb{A} X$, kde $\mathbb{A}$ je matica susednosti n-uholníka. Teda ak na začiatku vezmeme vektor $(m, 0, \ldots, 0)^T$, potom po k-tom kroku bude vektor rozdelenia

$$X^k = \frac{1}{2^k} \mathbb{A}^k (m, 0, \ldots, 0)^T.$$

Opíšme teraz tok na konkrétnom n-uholníku — na trojuholníku na *obr. 3.*



Obr. 3

Matica susednosti $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a začiatočný vektor rozdelenia $(m, 0, 0)^T$. S využitím podobných matíc vypočítame, že vektor rozdelenia po k-tom kroku bude:

$$X^k = \frac{1}{2^k} \mathbb{A}^k \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{m}{2^k} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (2(-1)^k + 2^k \\ \frac{1}{3} (-(-1)^k + 2^k \\ \frac{1}{3} (-(-1)^k + 2^k) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Porovnajme tento výsledok s výsledkom pri pohybe na priamke.

Celkový počet mravcov na priamke môžeme zapísať v tvare

$$m=\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k} \tag{2}$$

Sumu (2) môžeme rozložiť na tri sčítance takto:

$$m=\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 0}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}+\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 1}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}+\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 2}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k} \tag{3}$$

kde kongruencie sú brané mod 3.

Výsledok (1) dostaneme pri toku na trojuholníku a výsledok (3), ak body priamky obsadené mravcami stotožníme postupne s vrcholmi trojuholníka. Obidva výsledky môžeme preto porovnať. Porovnaním dostaneme kombinatorické identity:

$$\frac{1}{3}(2(-1)^k+2^k)=\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\ \forall i; \qquad i\equiv 0 \ (\text{mod } 3)$$

$$\frac{1}{3}(-(-1)^k+2^k)=\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\ \forall i; \qquad i\equiv 1\ (mod\ 3)\ v\ i\equiv 2\ (\text{mod } 3)$$

Pri opisovaní toku na vyšších nepárnouholníkoch využijeme nasledujúce vlastnosti matíc [3]:

Nech štvorcová matica $\mathbb{M}$ má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastné hodnoty tejto matice majú tvar $s_k=\varepsilon^k$ $(k=0, 1, \dots, n-1)$. Maticu $\mathbb{A}$ susednosti n-uholníka dostaneme ako súčet $\mathbb{A}=\mathbb{M}+\mathbb{M}^{n-1}$, kde $\mathbb{A}$, $\mathbb{M}$ sú štvorcové matice typu $n\times n$. Vlastné vektory matíc $\mathbb{A}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^{n-1}$ sú rovnaké a majú tvar $u_1=(1, 1, \dots, 1)$, $u_2=(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}, 1)$, $u_n=(\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{2(n-1)}, \dots, 1)$. Ak číslo $\varepsilon=e^{i\cos 2\pi/n}$ je komplexné číslo, potom k nemu komplexne združené je $\bar{\varepsilon}=e^{-i\cos 2\pi/n}$ a platí:

$$\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=1$$

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\dots+\varepsilon^{n-1}=0$$

Z vlastných vektorov $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$ zostavíme maticu prechodu $\mathbb{P}=\|\mathbb{p}_{ij}\|$ a k nej maticu $\mathbb{P}^{-1}=\|\mathbb{g}_{ij}\|$, ktorá je k $\mathbb{P}$ adjungovaná (pre všetky i, j platí: $\mathbb{p}_{ij}=\mathbb{g}_{ji}$) a $\mathbb{P}\dfrac{1}{n}\mathbb{P}^{-1}=\mathbb{I}$.

Na základe toho môžeme vyriešiť úlohu pre ľubovoľný nepárnouholník. Výsledky pre päťuholník:

$$m=\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 0}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}+\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 1}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}+\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 2}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 3}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k}+\sum_{\substack{i=1\\ i\equiv 4}}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{m}{2^k} \tag{4}$$

kde kongruencie sú brané mod 5.

$$\mathbf{X}^k=\frac{1}{2^k}\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}m\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{m}{2^k}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\,[2^k(2\cos^k 2\pi/5+2\cos^k 4\pi/5+1)]\\ \frac{1}{5}\,(\cos^k 2\pi/5(\varepsilon+\varepsilon^4)+\cos^k 4\pi/5(\varepsilon^2+\varepsilon^3))\\ \frac{1}{5}\,(\cos^k 2\pi/5(\varepsilon^2+\varepsilon^3)+\cos^k 4\pi/5(\varepsilon^4+\varepsilon^1))\\ \frac{1}{5}(\cos^k 2\pi/5(\varepsilon+\varepsilon^4)+\cos^k 4\pi/5(\varepsilon^2+\varepsilon^3))\\ \frac{1}{5}\,(\cos^k 2\pi/5(\varepsilon^2+\varepsilon^3)+\cos^k 4\pi/5(\varepsilon+\varepsilon^4))\end{pmatrix} \tag{5}$$

Porovnaním riadkov matice (5) so sumami kombinačných čísel (4) dostaneme kombinatorické identity.

Analogickým spôsobom môžeme opísať tok na ľubovoľnom nepárnouholníku po určitom kroku.

Čitateľovi odporúčame porozmýšľať nad spôsobom priebehu opísaného toku na párnouholníku.

Literatúra

[1] Sedláček, J.: Úvod do teórie grafov. Academie Praha 1977.
[2] MacLane, S.—Birkhoff, G.: Algebra. Alfa Bratislava 1973.
[3] Makus, M.—Mink, Ch.: Obzor po teorii matric i matričnych neravenstv. Nauka Moskva 1972.