VEKTORY OČIMA FUNKCIONÁLNÍHO ANALYTIKA

BOHDAN ZELINKA, Liberec

Úvodem budiž poznamenáno, že zmíněné oči funkcionálního analytika nejsou autorovýma očima; autor se rozhodně za funkcionálního analytika nepokládá. Bylo by však vhodné, aby pohled očima algebraika [1] a pohled očima geometra [2] byly doplněny ještě třetím pohledem. A tento třetí pohled se zaměří především na vektorové prostory nekonečné dimense.

V [1] byla uvedena definice vektorového prostoru. Připomeneme zde tuto definici, přičemž označení poněkud změníme; přidržíme se knihy [3].

Definice 1. Vektorový prostor je neprázdná množina $\mathscr{X}$, jejíž prvky se nazývají vektory, s operací sčítání vektorů, násobení vektoru reálným číslem a s pevným prvkem $\boldsymbol{o}$, přičemž pro libovolné vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ a libovolná reálná čísla α, β platí:

A1 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;
A2 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;
A3 ke každému vektoru $\boldsymbol{x}\in\mathscr{X}$ existuje vektor $-\boldsymbol{x}\in\mathscr{X}$ takový, že $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$;
A4 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;
S1 $(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$;
S2 $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$;
S3 $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$;
S4 $1.\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Vektor $\boldsymbol{o}$ sa nazýva nulový vektor, vektor $-\boldsymbol{x}$ se nazývá vektor opačný k vektoru $\boldsymbol{x}$.

Od definice vektorového prostoru můžeme přejít k definici normovaného vektorového prostoru a vektorového prostoru se skalárním součinem.

Definice 2. Vektorový prostor $\mathscr{X}$ se nazývá normovaným vektorovým prostorem, jestliže každému $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ je přirazeno reálné číslo $\|\boldsymbol{x}\|$ nazývané norma vektoru $\boldsymbol{x}$, přičemž pro každé $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ z $\mathscr{X}$ a pro každé reálné číslo λ platí:

N1 $\|\boldsymbol{x}\| \geqq 0, \ \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$;
N2 $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = \|\lambda\| . \|\boldsymbol{x}\|$;
N3 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Vidíme, že třírozměrný vektorový prostor s velikostí vektoru definovanou známým způsobem je normovaným vektorovým prostorem a tato velikost je normou vektoru.

Definice 3. Nechť $\mathscr{X}$ je vektorový prostor. Nechť každé uspořádáné dvojici $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vektorů z $\mathscr{X}$ je přiřazeno reálné číslo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tak, že pro libovolné vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ z $\mathscr{X}$ a pro libovolné reálné číslo λ platí:

H1 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
H2 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$;
H3 $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;
H4 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0, \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Potom $\mathscr{X}$ se nazývá vektorový prostor se skalárním součinem a $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se nazývá skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Platí nyní, že je-li $\mathscr{X}$ vektorový prostor se skalárným součinem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, pak $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ je normou vektora $\boldsymbol{x}$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$. Důkaz lze nalézt v [3], strana 34.

Je-li $\mathscr{X}$ vektorový prostor konečné dimense n, pak, jak známo, lze zvolit některou jeho bázi a pomocí ní přiradit každému vektoru z $\mathscr{X}$ jeho souřadnice, kterých je n. Jsou-li potom $x_1, \ldots, x_n$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ a $y_1, \ldots, y_n$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{y}$, pak můžeme položit

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

a máme definován skalární součin i normu vektoru.

Přejdeme nyní k vektorovým prostorům nekonečné dimense. Čtenáře jistě napadne prostor složený ze všech nekonečných posloupností reálných čísel. Skutečně tento prostor splňuje A1—A4 i S1—S4, pokud za součet posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bereme posloupnost $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, za součin posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s číslem λ posloupnost $\{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a za nulový vektor posloupnost složenou ze samých nul.

Měli bychom ovšem potíže s normou a se skalárním součinem. Proto nevezmeme všechny nekonečné posloupnosti reálných čísel, ale pouze takové posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro něž nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje.

Při dokazování, že množina všech takových posloupností je vektorovým prostorem se skalárním součinem, začneme od konce — od toho skalárního součinu. Rádi bychom definovali skalární součin vektorů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jako součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$; musíme ovšem dokázat, že konverguje. Víme, že pro libovolná dvě reálná čísla a, b platí nerovnost

$$0 \leqq (|a| - |b|)^2 = a^2 - 2\,|ab| + b^2$$

Z ní potom dostáváme

$$|ab| \leqq \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2)$$

a tedy

$$|a_n b_n| \leqq \frac{1}{2}\,a_n^2 + \frac{1}{2}\,b_n^2$$

pro libovolné n. Protože konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,(a_n^2 + b_n^2)$ a vzhledem k uvedené nerovnosti konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Že pro tento definovaný skalární součin platí H1—H4, lze snadno dokázat; ponecháváme to čtenáři jako cvičení. Vidíme, že takto lze zavést v našem vektorovém prostoru skalární součin. Ovšem pouze pokud je to skutečně vektorový prostor; to jsme ještě nedokázali.

Nebude to však tak těžké. Je zřejmé, že je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje, a λ reálné číslo, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)^2$ také konverguje. Rovněž je zřejmé, že posloupnost složená ze samých nul také tuto podmínku splňuje. Zbývá tedy dokázat, že pro každé dvě poslounosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergují, konverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$. To ovšem je již snadné. Máme $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$ a víme, že konvergují řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ jakožto jejich součet konverguje také.

Povězme nyní něco o lineární závislosti ve vektorových prostorech nekonečné dimense. Množina vektorů z takovéhoto prostoru je lineárně závislá právě tehdy, obsahuje-li konečnou lineárně závislou podmnožinu (lineární závislost pro konečné množiny vektorů je definována stejně jako v prostorech konečné dimense).

V našem prostoru můžeme uvést příklad nekonečné lineárně nezávislé množiny vektorů. Je to množina složená z posloupností $\{a_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$, kde m probíhá všechna přirozená čísla a $a_n^{(m)} = 1$ pro $m = n$ a $a_n^{(m)} = 0$ pro $m \neq n$. Není to ovšem báze našeho prostoru, ale je to báze jistého jeho podprostoru, který se skládá ze všech nekonečných posloupností reálných čísel, jež mají pouze konečný počet nenulových členů. Pomocí Zornova lematu by se dalo dokázat, že i náš prostor má bázi; bylo by však obtížné ji konstruovat.

Probrali jsme tedy vektorový prostor, jehož každému prvku lže přiřadit spočetně mnoho souřadnic. Jak by to nyní vypadalo, kdybychom chtěli dostat vektory s nespočetně mnoha souřadnicemi?

Vezměme si nějakou množinu mohutnosti kontinua, například uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ na číselné ose. Přiřadíme-li každému jeho prvku nějaké reálné číslo, dostaneme cosi, co můžeme považovat za vektor o nespočetně mnoha souřadnicích. Ve skutečnosti je to ovšem funkce jedné proměnné definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$; příslušné souřadnice jsou hodnoty této funkce v jednotlivých bodech tohoto intervalu.

Uvažujme tedy množinu všech reálných funkcí jedné proměnné definovaných na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Sčítání dvou funkcí i násobení funkce konstantou jsou zcela běžné operace; vezmeme-li tyto operace a prvek $\boldsymbol{o}$ položíme rovný funkci identicky rovné nule na $\langle a, b \rangle$, vidíme, že A1—A4 i S1—S4 jsou splněny a tedy můžeme tuto množinu považovat za vektorový prostor.

Abychom mohli vhodně definovat skalární součin a normu, omezíme se na podmnožinu této množiny tvořenou spojitými funkcemi. Je to zřejmě podprostor zmíněného vektorového prostoru, protože součet dvou spojitých funkcí, součin spojité funkce s konstantnou i funkce identicky rovná nule jsou funkce spojité.

Jsou-li f, g dvě funkce definované a spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, definujeme

$$(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Součin fg je opět spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, je tedy také na tomto intervalu omezená a integrál od a do b z této funkce existuje. Platnost N1, N2 a N3 je zřejmá; je zřejmé i to, že $(f, f)\geqq 0$ a že pro $f\equiv 0$ je $(f, f)=0$. Dokažme si ještě, že $(f, f)>0$ pro každou funkci f z našeho prostoru, která není identicky rovna nule.

Jestliže f není identicky rovna nule, pak ani f^2 není identicky rovna nule. Dále f^2 nabývá pouze nezáporných hodnot. Existuje tedy $c\in\langle a, b\rangle$ takové, že $(f(c))^2>0$. Poněvadž jde o funkci spojitou, existuje okolí Ω bodu c, v němž f^2 nabývá pouze kladných hodnot. Integrál funkce f^2 přes Ω je tedy kladný. Integrál přes $\langle a, b\rangle-\Omega$ z f^2 nemůže být záporný, protože jde o funkci nabývající pouze nezáporných hodnot. Integrál přes $\langle a, b\|$ je součtem integrálu přes Ω a integrálu přes $\langle a, b\rangle-\Omega$, tedy je kladný.

Máme tedy definován skalární součin. U vektorů v euklidovském prostoru jsme se setkali s pojmem kolmosti vektorů a dověděli jsme se, že dva nenulové vektory jsou navzájem kolmé právě tehdy, je-li jejich skalární součin roven nule. Funkce f, g definované a spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

nazýváme ortogonální. Znamená to totéž, co kolmé, zní to ovšem učeněji. Příkladem ortogonálních funkcí jsou funkce $y=\sin x$ a $y=\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Samozřejmě definujeme i normu způsobem popsaným výše, tedy

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \, dx}.$$

Uveďme si příklad nespočetné množiny lineárně nezávislých vektorů v našem prostoru. Pokud $0 \notin \langle a, b \rangle$, budou to funkce x^r, kde r probíhá všechna kladná reálná čísla. Dokážeme jejich lineární nezávislost.

Předpokládejme, že množina těchto vektorů je lineárně závislá. Pak tedy existuje konečná lineárně závislá podmnožina této množiny. Budiž n nejmenší mohutnost takovéto množiny. Kdyby bylo $n = 1$, existovala by funkce x^r identicky rovná nule na $\langle a, b \rangle$, což zřejmě není možné. Je tedy $n \geqq 2$ a jde o nějakou množinu $x^r, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}$, kde $r_1, \ldots, r_n$ jsou navzájem různá kladná reálná čísla; bez újmy na obecnosti budiž r_1 nejmenší z nich. Protože jde o lineárně závislou množinu, existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{r_i} \equiv 0 \tag{1}$$

Koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou vesměs nenulové; kdyby bylo $\alpha_j = 0$ pro nějaké j, pak bychom mohli z naší množiny odstranit x^{r_j} a dostali bychom lineárně závislou množinu mohutnosti $n - 1$, což by byl spor. Vydělíme obě strany vztahu (1) výrazem x^{r_1}; tento výraz je nenulový pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, protože $0 \notin \langle a, b \rangle$. Dostáváme

$$\alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x^{r_i - r_1} \equiv 0.$$

Derivace funkce identicky rovné nule je opět identicky rovna nule. Tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (r_i - r_1) x^{r_i - r_1 - 1} \equiv 0.$$

Vynásobením obou stran výrazem x^{r_1+1} dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (r_i - r_1) x^{r_i} \equiv 0$$

Protože $r_1, \ldots, r_n$ jsou navzájem různé, je $\alpha_i\ r_i - r_1) \neq 0$ pro $i = 2, \ldots, n$ a funkce $x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}$ jsou lineárně závislé. To je ovšem spor s minimalitou čísla n.

Pokud $0 \in \langle a, b \rangle$, vezmeme místo funkcí x^r funkce $(x + b + 1)^r$; důkaz bude obdobný.

S pojmem lineární závislosti funkcí se setkáváme například v teorii diferenciálních rovnic (vzpomeňme si na Wronského determinant).

Dalšími podrobnostmi se zabývat nebudeme; čtenář je může nalézt v příslušné literatuře, například v [3]—[7]. Zde nám šlo jen o to, abychom ukázali, že existují vektorové prostory, jejichž prvky jsou značně vzdáleny představě vektoru jako uspořádané n-tice čísel nebo jako posunutí.

Literatura

[1] Gedeonová, E.: Vektory očami algebraika. In: Matematické obzory 8/75. ALFA, Bratislava 1975, s. 11.

[2] Madek, V.: Vektory očami geometra. In: Matematické obzory 9/76. ALFA, Bratislava 1976, s. 1.

]3] Nekvinda, M. — Šrubař, J. — Vild, J.: Úvod do numerické matematiky, SNTL, Praha 1976.

[4] Kufner, A.: Geometrie Hilbertova prostoru. SNTL, Praha 1975.

[5] Rudin, M.: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha 1977.

[6] Šilov, G. J.: Matematická analýza. ALFA, Bratislava 1974.

[7] Taylor, A. E.: Úvod do funkcionální analysy. Academia, Praha 1973.