MATEMATICKÉ OBZORY 12 1978

KONVERGENCIA NEKLESAJÚCICH OHRANIČENÝCH POSTUPNOSTÍ V *R* A EXISTENCIA ODMOCNINY A LOGARITMU

T. ŠALÁT, Bratislava

Základom budovania diferenciálneho a integrálneho počtu na množine R všetkých reálnych čísel je platnosť vety o supreme v R (spojité usporiadanie množiny R). Z vety o supreme možno ľahko odvodiť známy poznatok o konvergencii ohraničených neklesajúcich postupností reálnych čísel (pozri [2], s. 102). Už nie tak bežným poznatkom je fakt, že z predpokladu konvergencie ohraničených neklesajúcich postupností vyplýva veta o supreme v R. V tomto článku, ktorý je metodologickým príspevkom k teórii reálnych čísel, podávame dôkaz spomínaného faktu a ukážeme, že pomocou vety o konvergencii neklesajúcich ohraničených postupností reálnych čísel možno dokázať existenciu odmocniny a logaritmu.

1

V tomto odstavci znak R označuje pole všetkých reálnych čísel s obvyklým usporiadaním (s tým, ktoré prináša niektorá z teórií reálnych čísel, napr. teória Dedekindových rezov — pozri [2], s. 38, 39).

Označme znakom V_1 výrok: Pole R je spojito usporiadané, t. j. každá neprázdna zhora ohraničená množina $M \subset R$ má v R supremum a znakom V_2 výrok: Každá neklesajúca zhora ohraničená postupnosť reálnych čísel má v R limitu.

Veta 1.1. $V_2 \Rightarrow V_1$

Dôkaz. Nech $M \subset R$, $M \neq \emptyset$, M zhora ohraničená. Dokážeme, že množina M má v R supremum.

Nech y_1 je horné ohraničenie množiny M. Zvoľme $x_1 < y_1$ tak, aby x_1 nebolo horným ohraničením množiny M (stačí zvoliť $x_1 < z$, kde $z \in M$). Rozdeľme interval x_1, y_1 na dve „polovice", t.j. zostrojme v ňom bod $\frac{x_1+y_1}{2}$. Ak $\frac{x_1+y_1}{2}$ je (nie je) horným ohraničením množiny M, tak kladieme

$$x_2 = x_1, \ y_2 = \frac{x_1+y_1}{2} \left(x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}, \ y_2 = y_1 \right).$$

Interval $\langle x_2, y_2 \rangle$ má tú vlastnosť, že jeho pravý (ľavý) koncový bod je (nie je) horným ohraničením množiny M a $y_2 - x_2 = \frac{y_1 - x_1}{2}$.

Predpokladajme, že sme už zostrojili intervaly

$$\langle x_1, y_1 \rangle \supset \langle x_2, y_2 \rangle \supset \ldots \supset \langle x_k, y_k \rangle$$

pričom pravý (ľavý) koncový bod každého z intervalov $\langle x_j, y_j \rangle$ $(1 \leqq j \leqq k)$ je (nie je) horným ohraničením množiny M a

$$y_j - x_j = \frac{y_1 - x_1}{2^{j-1}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Zostrojme bod $\frac{x_k + y_k}{2}$. Ak $\frac{x_k + y_k}{2}$ je (nie je) horným ohraničením množiny M, tak kladieme

$$x_{k+1} = x_k, \ y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} \left(x_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2}, \ y_{k+1} = y_k \right).$$

Ihneď vidieť, že pravý (ľavý) koncový bod intervalu $\langle x_{k+1}, y_{k+1} \rangle$ je (nie je) horným ohraničením množiny M a $y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{y_1 - x_1}{2^k}$.

Takto (indukciou) skonštruujeme postupnosť

$$\langle x_1, y_1 \rangle \supset \langle x_2, y_2 \rangle \supset \ldots \supset \langle x_n, y_n \rangle \supset \ldots$$

uzavretých intervalov s vlastnosťami:

a) x_n nie je a y_n je horným ohraničením množiny M $(n = 1, 2, \ldots)$;

b) $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zrejme neklesajúca a zhora ohraničená (číslom y_1). Preto podľa predpokladu existuje

$$g = \lim_{n \to \infty} x_n \in R \tag{1}$$

No potom z b) vyplýva, že aj

$$\lim_{n \to \infty} y_n = g$$

Ukážeme, že $g = \sup M$. Z a) vyplýva, že pre každé $n = 1, 2, \ldots$ platí $x \leqq y_n$. Odtiaľ pri $n \to \infty$ dostávame $x \leqq g$. Teda g je horným ohraničením množiny M. Stačí dokázať, že žiadne číslo menšie než g už nie je horným ohraničením množiny M. Nech $g' < g$. Z (1) vyplýva existencia takého m, že

$$g' < x_m \tag{2}$$

Keďže podľa a) číslo x_m nie je horným ohraničením množiny M, z (2) vyplýva, že ani g' nie je horným ohraničením množiny M. Tým je dôkaz vety skončený.

2

V tejto časti článku sa budeme zaoberať otázkou *existencie* odmocniny a logaritmu. Dôraz tu kladiem na slovko „existencia", keďže sa mi neraz v mojej pedagogickej práci stalo, že študenti nechápali dostatočne potrebu zaručiť existenciu definovaného pojmu; často za postačujúcu záruku považovali už samotnú definíciu.

Dôkaz existencie odmocniny možno založiť na použití vety o supreme. Dôkaz tohto druhu možno nájsť v [2] a [4] (pozri [2], s. 60 až 62 a [4], s. 21, 22). Iný druh dôkazu je založený na úplnosti množiny R (presnejšie na úplnosti metrického priestoru (R, d), kde d označuje euklidovskú metriku). Taký typ dôkazu možno nájsť v [5] (s. 85 až 88). Ekvivalencia výrokov V_1 a V_2 dáva podnet uskutočniť dôkaz existencie odmocniny pomocou V_2. To v nasledujúcej vete aj urobíme, pričom postup jej dôkazu bude veľmi pripomínať štruktúru dôkazu vety 1.1.

Veta 2.1. Nech m je prirodzené číslo a a je kladné reálne číslo. Potom existuje jediné také reálne číslo $y>0$, že $y^m=a$.

Dôkaz. Jednoznačnosť čísla y je ľahkým dôsledkom pravidiel o počítaní s mocninami, konkrétne faktu, že ak $0<y_1<y_2$, tak aj $y_1^m<y_2^m$.

Jadro dôkazu sa týka zaručenia existencie (aspoň jedného) čísla $y>0$ s vlastnosťou: $y^m=a$.

Zostrojme číslo $x_1>0$, resp. $y_1>0$ tak, aby platilo $x_1^m<a$, resp. $a \leqq y_1^m$. Za číslo $x_1(y_1)$ možno vziať $\frac{a}{1+a}$ $(1+a)$. Zrejme $x_1<y_1$. Zostrojme číslo $\frac{x_1+y_1}{2}$. Ak

$$\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^m<a \quad \left(\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^m \geqq a\right),$$

tak kladieme

$$x_2=\frac{x_1+y_1}{2}, \; y_2=y_1 \quad \left(x_2=x_1, \; y_2=\frac{x_1+y_1}{2}\right).$$

Platí $x_2<y_2$ a interval $\langle x_2, y_2 \rangle$ má tú vlastnosť, že $y_2-x_2 = \frac{y_1-x_1}{2}$ a $x_2^m<a \leqq y_2^m$.

Indukčný krok v tejto konštrukcii možno prenechať čitateľovi (vzhľadom na jeho podobnosť s obdobným krokom v dôkaze vety 1.1).

Takto indukciou zostrojíme postupnosť

$$\langle x_1, y_1 \rangle \supset \langle x_2, y_2 \rangle \supset \ldots \supset \langle x_k, y_k \rangle \supset \ldots$$

uzavretých intervalov s týmito vlastnosťami:

c) $x_k^m<a \leqq y_k^m \quad (k=1, 2, \ldots)$

d) $y_k-x_k=\frac{y_1-x_1}{2^{k-1}} \quad (k=1, 2, \ldots)$

Zrejme $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť reálnych čísel zhora ohraničená (číslom y_1). Preto na základe V_2 existuje $y=\lim\limits_{k\to\infty} x_k>0$. Z d) vyplýva, že aj $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=y$. Na základe známych pravidiel o počítaní s limitami z c) vyplýva $y^m \leqq a \leqq y^m$, odtiaľ $y^m=a$. Tým je dôkaz vety skončený.

Dôkaz existencie logaritmu možno založiť na použití vety o supreme (výrok V_1). Tak je to urobené v [2], s. 124, 125. Iný typ dôkazu, ktorý sa zakladá na úplnosti metrického priestoru (R, d), je podaný v [5], s. 140 až 142. Originálny postup, ktorý využíva dekadické rozvoje reálnych čísel (a v konečnom dôsledku spočíva na V_1) je podaný v článku [1]. Komentáre [3], [6] využívajú na dôkaz existencie logaritmu vlastnosti inverznej funkcie. Teraz dokážeme existenciu logaritmu; dôkaz je založený na V_2, štruktúrou veľmi podobný dôkazom viet 1.1 a 2.1.

Existenciu logaritmu stačí, ako vieme, dokázať pre základ $a>1$.

Veta 2.2. Nech $a, x \in R$, $a>1$, $x>0$. Potom existuje jediné také $y \in R$, že $a^y = x$.

Dôkaz. Jednoznačnosť čísla y vyplýva ľahko zo známych pravidiel o počítaní s mocninami reálnych čísel, konkrétne z tohto faktu: Ak $a>1$, $y_1<y_2$, tak aj $a^{y_1}<a^{y_2}$.

Dokážeme existenciu (aspoň jedného) čísla $y \in R$ s vlastnosťou: $a^y = x$.

Zvoľme $x_1, y_1 \in R$ tak, aby $a^{x_1}<x$, $a^{y_1} \geqq x$. Keďže $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, existencia týchto čísel je zrejmá. Ďalej zrejme $x_1<y_1$ (keďže $a>1$). Zostrojme číslo $\dfrac{x_1+y_1}{2}$. Ak

$$a^{(x_1+y_1)/2}<x \quad (a^{(x_1+y_1)/2} \geqq x),$$

tak kladieme

$$x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}, \; y_2 = y_1 \left(x_2 = x_1, \, y_2 = \frac{x_1+y_1}{2} \right).$$

Interval $\langle x_2, y_2 \rangle$ má tú vlastnosť, že $y_2 - x_2 = \dfrac{y_1-x_1}{2}$ a $a^{x_2}<x \leqq a^{y_2}$.

Indukčný krok v tejto konštrukcii možno prenechať čitateľovi.

Takto (indukciou) zostrojíme postupnosť

$$\langle x_1, y_1 \rangle \supset \langle x_2, y_2 \rangle \supset \ldots \supset \langle x_k, y_k \rangle \supset \ldots$$

intervalov s vlastnosťami:

e) $a^{x_k}<x \leqq a^{y_k} \quad (k=1, 2, \ldots)$

f) $y_k - x_k = \dfrac{y_1-x_1}{2^{k-1}} \quad (k=1, 2, \ldots)$

Postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je zrejme neklesajúca a zhora ohraničená (číslom y_1). Preto podľa V_2 existuje $\lim_{k\to\infty} x_k = y \in R$. Z f) vyplýva, že aj $\lim_{k\to\infty} y_k = y$. Podľa známych pravidiel o počítaní s limitami z e) vyplýva $a^y \leqq x \leqq a^y$, odkiaľ $x \leqq a^y$. Tým je dôkaz vety skončený.

Literatúra

[1] Hohn, F. E.: An existence proof for logarithmus. Amer. Math. Monthly 50, 1943, 115—116.
[2] Jarník, V.: Diferenciální počet I. NČSAV, Praha 1955.
[3] Odvárko, O.—Mikulčák, J.—Šedivý, J.—Vyšín, J.: Komentář pro učitele k používání učebnic matematiky pro SVVŠ ve II. roč. gymnasií. SPN, Praha 1970.
[4] Rudin, W.: Principles of Mathematical Analysis. New York 1963. (Ruský preklad: Osnovy matematičeskogo analiza. Mir, Moskva 1964.)
[5] Sierpiński, W.: Dzialania nieskończone. Czytelnik, Warszawa 1948.
[6] Vyšín, J.—Riečan, B.—Šedivý, J.—Zítek, F.: Komentár pre učiteľov na používanie učebníc matematiky pre SVŠ vo 4. ročníku gymnázia. SPN, Bratislava 1972.