NETRADIČNÁ KONŠTRUKCIA REÁLNYCH ČÍSEL IV

LADISLAV MIŠÍK

V predchádzajúcej časti sme ukázali (vety 10 a 11), že v každej úplnej lineárne usporiadanej komutatívnej v sebe hustej grupe môžeme definovať násobenie tak, že algebrická štruktúra, ktorá vznikne z tejto úplnej lineárne usporiadanej komutatívnej v sebe hustej grupy pribratím tohto násobenia, je množina všetkých reálnych čísel.

Teda na konštrukciu množiny všetkých reálnych čísel stačí konštrukcia úplnej lineárne usporiadanej komutatívnej v sebe hustej grupy. V tejto časti ukážeme, že je možné úplnú lineárne usporiadanú komutatívnu v sebe hustú grupu konštruovať „dyadickými rozvojmi", t. j. funkciami definovanými na množine všetkých celých čísel, pričom hodnoty týchto funkcií sú len čísla 0 a 1.

5. Množina „dyadických rozvojov" a operácia rozdielu

Ako vieme, môžeme každé nezáporné reálne číslo x vyjadriť v dvojkovej sústave jediným spôsobom ako nekonečný rad $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot 2^{-n}$, kde $a_n \in \{0, 1\}$ pre každé n z množiny Z všetkých celých čísel, pričom ešte platí: a) existuje také $p \in Z$, že $a_n = 0$ pre $n \in Z$ a $n < p$ a b) pre každé $n \in Z$ existuje také $k \in Z$, že $n < k$ a $a_k = 0$. Teda číslo x môžeme reprezentovať ako funkciu $f\colon Z \to \{0, 1\}$ definovanú na množine Z všetkých celých čísel s hodnotami 0 a 1, pre ktorú ešte platí: a) existuje také $p \in Z$, že $a_n = 0$ pre $n \in Z$ a $n < p$, a b) ku každému $n \in Z$ existuje také $k \in Z$, že $n < k$ a $a_k = 0$.

Napríklad číslo 1 je reprezentované funkciou $f\colon Z \to \{0, 1\}$, pre ktorú $f(n) = 0$ pre $n \in Z$ a $n \geqq 1$, $f(0) = 1$ a $f(n) = 0$ pre $n \in Z$ a $n \leqq -1$; číslo 0 je reprezentované funkciou $\Phi\colon Z \to \{0, 1\}$, pre ktorú $\Phi(n) = 0$ pre každé $n \in Z$. Akou funkciou by sme však mali reprezentovať číslo -1? Mala by to byť taká funkcia $g\colon Z \to \{0, 1\}$, pre ktorú by $f + g = \Phi$. Avšak na to potrebujeme vedieť, čo je $f+g$. Musíme teda vedieť spočítavať. Pripomeňme si preto, ako sme spočítali v desiatkovej sústave napríklad

$$\begin{array}{r} 328 \\ \underline{191} \\ 519 \end{array}$$

Začali sme sprava doľava, a keď súčet čísel v stĺpci (u nás v druhom stĺpci $2+9=11$) bol väčší alebo rovný číslu 10, napísali sme za výsledné číslo číslo rovné súčtu zmenšenému o 10 (u nás $11-10=1$) a pridali sme k súčtu nasledujúceho stĺpca ešte číslo 1. S týmto súčtom sme potom postupovali ako v predchádzajúcom stĺpci.

Pri dvojkovej sústave môžeme sčítavať podobne, len úlohu čísla desať prevezme číslo dve. Označme teraz b_n číslo $g(n)$. Pripomeňme si, že $b_n \in \{0, 1\}$ pre každé $n \in Z$. Potom $f+g=\Phi$ podľa predchádzajúceho vzoru môžeme zapísať:

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & b_{-3} & b_{-2} & b_{-1} & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ \hline \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

Pretože $0=f(n)+g(n)=0+b_n$ pre $n \in Z$ a $n \geqq 1$, musí byť $b_n=0$ pre $n \in Z$ a $n \geqq 1$. Pretože $0=f(0)+g(0)=1+b_0$, musí byť $b_0=1$ a zostáva po súčte číslo 1 $(1+1=2)$, ktoré musíme pripočítať k súčtu ďalšieho stĺpca. Teda $0=f(-1)+g(-1)+1=0+b_{-1}+1$, čiže $b_{-1}=1$. Ale zasa zostáva číslo 1. Preto $0=f(-2)+g(-2)+1=0+b_{-2}+1$, čiže $b_{-2}=1$. Takto by sme postupovali (napr. indukciou) a dokázali, že $b_n=1$ pre každé $n \in Z$, pre ktoré $n \leqq -1$. Teda $g(n)=0$ pre $n \in Z$, pre ktoré $n \geqq 1$ a $g(n)=1$ pre $n \in Z$, pre ktoré $n \leqq 0$. Teda číslo -1 by sme mohli reprezentovať funkciou g.

Po týchto úvahách budú čitateľovi používané definície zrozumiteľnejšie a prirodzenejšie. Avšak namiesto operácie súčtu budeme používať operáciu rozdielu.

Definície. Nech $T=\{f: f: Z \to \{0, 1\}\}$. Nech $U=\{f \in T$: pre každé $x \in Z$, pre ktoré $f(x)=1$, existuje také $y \in Z$, že $x<y$ a $f(y)=0\}$.

Nech $f, g \in T$. Potom definujme funkciu $p_{f,g}: Z \to \{0, 1\}$ takto: pre $z \in Z$ je $p_{f,g}(z)=1$ vtedy a len vtedy, keď existuje také $x \in Z$, že $z<x$,

$0=f(x)<g(x)=1$ a $f(y) \leqq g(y)$ pre každé $y \in Z$, pre ktoré $z<y<x$.

Označme znakom Φ tú funkciu z T, pre ktorú $\Phi(x)=0$ pre každé $x \in Z$.

Nech $z \in Z$. Potom definujme $(z)_{\bmod 2}$ takto: $(z)_{\bmod 2}=0$, ak z je deliteľné dvoma a $(z)_{\bmod 2}=1$, ak $z-1$ je deliteľné dvoma.

Tvrdenie 17. Platí:

a) $\Phi \in U$,

b) $p_{f,\Phi}=\Phi$ pre každé $f \in T$,

c) $p_{f,f}=\Phi$ pre každé $f \in T$.

Dôkaz. a) Pretože pre každé $x \in Z$ je $\Phi(x)=0$, je $\Phi \in U$.

b) Pretože neexistuje také $x \in Z$, pre ktoré by platilo, že $\Phi(x)=1$, je podľa definície $p_{f,g}$ hodnota $p_{f,\Phi}(z)=0$ pre každé $z \in Z$. Teda $p_{f,\Phi}=\Phi$.

c) Pretože neexistuje také $x \in Z$, pre ktoré by platilo, že $0=f(x) < f(x)=1$, podľa definície $p_{f,g}$ je $p_{f,f}(z)=0$ pre každé $z \in Z$. Teda $p_{f,f}=\Phi$.

Definícia. Pre $f, g \in T$ definujme rozdiel $f-g \in T$ takto: $(f-g)(x)= =(f(x)-g(x) - p_{f,g}(x))_{\bmod 2}$ pre každé $x \in Z$.

Tvrdenie 18. a) Nech $f, g \in T$. Potom pre každé $z \in Z$ platí: $(f-g)\cdot .(z)=f(z)-g(z)-p_{f,g}(z)+2p_{f,g}(z-1)$.

b) Nech $f, g \in U$. Potom $f-g \in U$.

Dôkaz. a) Treba dokázať, že $(f(z) - g(z) - p_{f,g}(z))_{\bmod 2} = f(z) - - g(z) - p_{f,g}(z) + 2p_{f,g}(z-1)$. Môžu nastať nasledovné prípady: α) $0=f(z)<g(z)=1$, β) $f(z) = g(z)$ a γ) $0=g(z) < f(z)=1$.

α) V prípade $0=f(z)<g(z)=1$, musí byť $p_{f,g}(z-1)=1$, a teda $(f(z)- -g(z)-p_{f,g}(z))_{\bmod 2} = 1 = 0-1-0+2 = f(z)-g(z)-p_{f,g}(z)+ + 2p_{f,g}(z-1)$, ak $p_{f,g}(z)=0$ a $(f(z) - g(z) - p_{f,g}(z))_{\bmod 2} = = 0 = 0 - 1 - 1 + 2 = f(z) - g(z) - p_{f,g}(z) + 2p_{f,g}(z-1)$, ak $p_{f,g}(z)=1$.

β) V prípade $f(z)=g(z)$, je $p_{f,g}(z-1)=p_{f,g}(z)$, a teda $(f(z)-g(z)- - p_{f,g}(z))_{\bmod 2} = 0 = f(z) - g(z) - p_{f,g}(z) + 2p_{f,g}(z-1)$, ak $p_{f,g}(z)=0$ a $(f(z)-g(z)-p_{f,g}(z))_{\bmod 2}=1=f(z)-g(z)-p_{f,g}(z)+ +2p_{f,g}(z-1)$, ak $p_{f,g}(z)=1$.

γ) V prípade $0=g(z)<f(z)=1$, je $p_{f,g}(z-1)=0$, a teda $(f(z)-g(z)- - p_{f,g}(z))_{\bmod 2} = 1 - p_{f,g}(z) = f(z) - g(z) - p_{f,g}(z) + 2p_{f,g}(z-1)$.

b) Nech existujú také $f, g \in U$, že $f-g \notin U$. Teda existuje také $z \in Z$, že $(f-g)(u)=1$ pre každé $u \in Z$, pre ktoré $z \leqq u$. Najprv dokážeme, že existuje také $y \in Z$, že $z \leqq y$ a $p_{f,g}(y)=0$.

Ak $p_{f,g}(z)=0$, môžeme za y brať z. Ak $p_{f,g}(z)=1$, tak existuje také $x\in Z$, že $0=f(x) < g(x)=1$ a $f(t)\leqq g(t)$ pre každé $t\in Z$, pre ktoré $z<t<x$. Z toho vidieť, že $p_{f,g}(x-1)=1$. Potom však $p_{f,g}(x)=0$, pretože $1 = (f-g)(x) = f(x) - g(x) - p_{f,g}(x) + 2p_{f,g}(x-1) = 0 - 1 - p_{f,g}(x) + 2\cdot 1 = 1 - p_{f,g}(x)$. Teda v prípade, že $p_{f,g}(z)=1$, môžeme za y brať x.

Nech $y\in Z$ je také, že $z\leqq y$ a $p_{f,g}(y)=0$. Matematickou indukciou dokážeme, že $f(y+n)=1$ a $g(y+n) = p_{f,g}(y+n)=0$ pre každé $n=1, 2, 3, \dots$. Označme $W = \{n\in N\colon f(y+n)=1, g(y+n) = p_{f,g}(y+n) = 0\}$.

$1\in W$: Pretože $1=(f-g)(y+1)=f(y+1)-g(y+1)-p_{f,g}(y+1)+ 2p_{f,g}(y) = f(y+1) - g(y+1) - p_{f,g}(y+1)$ a pretože $f(y+1)$, $g(y+1)$, $p_{f,g}(y+1) \in \{0, 1\}$, musí byť $f(y+1)=1$, $g(y+1) = p_{f,g}(y+1) = 0$.

Krok z $j\in W$ je aj $j+1\in W$: Nech teda $j\in W$. Potom $1= (f-g)(y+j+1)=f(y+j+1)-g(y+j+1)- p_{f,g}(y+j+1)+ 2p_{f,g}(y+j) = f(y+j+1) - g(y+j+1) - p_{f,g}(y+j+1)$. Keďže $f(y+j+1)$, $g(y+j+1)$, $p_{f,g}(y+j+1)\in\{0, 1\}$, musí byť $f(y+j+1)=1$, $g(y+j+1)=p_{f,g}(y+j+1)=0$. Teda $j+1\in W$.

Z matematickej indukcie vyplýva, že $W=N$. Teda $f(y+j)=1$ pre $j=1, 2, 3, \dots$. To je však v spore s tým, že $f\notin U$.

Veta 12. Nech f, g a $h\in U$. Potom platí:

$$f-\Phi=f,\ f-f=\Phi \quad \text{a} \quad f-(g-h)=h-(g-f).$$

Dôkaz. Pretože $p_{f,\Phi}=p_{f,f}=\Phi$, platí $(f-\Phi)(z) = (f(z) - \Phi(z) - p_{f,\Phi}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (f(z))_{\mathrm{mod}\,2} = f(z)$ a $(f-f)(z) = (f(z) - f(z) - p_{f,f}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre každé $z\in Z$. Tým sú rovnosti $f-\Phi=f$ a $f-f=\Phi$ dokázané.

Pre každé $z\in Z$ platí: $(f-(g-h))(z)=f(z)-(g-h)(z)-p_{f,g-h}(z)+ 2p_{f,g-h}(z-1) = f(z) - (g(z) - h(z) - p_{g,h}(z) + 2p_{g,h}(z-1)) - p_{f,g-h}(z) + 2p_{f,g-h}(z-1) = f(z) - g(z) + h(z) + p_{g,h}(z) - 2p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z) + 2p_{f,g-h}(z-1) = f(z) + h(z) - g(z) + (p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z)) - 2(p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1))$.
Podobne dostávame, že pre každé $z\in Z$ platí: $(h-(g-f))(z)=h(z)+ f(z) - g(z) + (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) - 2(p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1))$.
Z posledných dvoch nerovností dostávame:

$$(f-(g-h))(z)-(h-(g-f))(z)=$$

$$= p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) -$$
$$- 2((p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1)) -$$
$$- (p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1))) \qquad (1)$$

Pretože $|p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z))| \leqq 2$ pre všetky $z \in Z$ a pretože $|(f - (g-h))(z) - (h - (g-f))(z)| \leqq 1$, musí byť $2|p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1) - (p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1))| = |(f-(g-h))(z) - (h-(g-f))(z) - ((p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z)) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)))| \leqq |(f - (g-h))(z) - (h-(g-f))(z)| + |p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z))| \leqq 1+2=3$ pre všetky $z \in Z$, čiže $|p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1) - (p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1))| \leqq 1$ pre všetky $z \in Z$.

Nech $z \in Z$ je také, že $p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1) - (p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1)) = 1$. Označme $W = \{n \in Z^+ : (h - (g-f))(z+n) = 1, p_{g,h}(z+n) - p_{f,g-h}(z+n) - (p_{g,f}(z+n) - p_{h,g-f}(z+n)) = 1\}$. Matematickou indukciou dokážeme, že $W = Z^+$.

$0 \in W$: Z (1) dostávame: $(f-(g-h))(z) - (h-(g-f))(z) = p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) - 2 \leqq 1 - 2 = -1$. Keďže $(f - (g-h))(z) - (h - (g-f))(z) \geqq -1$, je $(f - (g-h))(z) - (h - (g-f))(z) = -1$. Teda musí platiť $p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) = 1$. Z rovnosti $(f - (g-h))(z) - (h - (g-f))(z) = -1$ a zo vzťahu $(f - (g-h))(z), (h - (g-f))(z) \in \{0, 1\}$ vyplýva, že $(f - (g-h))(z) = 0$ a $(h - (g-f))(z) = 1$. Teda $0 \in W$.

Krok z $i \in W$ vyplýva $i+1 \in W$: Nech $i \in W$, t. j. $(h-(g-f))(z+i) = 1$ a $p_{g,h}(z+i) - p_{f,g-h}(z+i) - (p_{g,f}(z+i) - p_{h,g-f}(z+i)) = 1$. Z rovnosti (1) dostávame, že $-1 \leqq (f - (g-h))(z+i+1) - (h - (g-f))(z+i+1) = p_{g,h}(z+i+1) - p_{f,g-h}(z+i+1) - (p_{g,f}(z+i+1) - p_{h,g-f}(z+i+1)) - 2 \leqq 1 - 2 = -1$. Z toho je $p_{g,h}(z+i+1) - p_{f,g-h}(z+i+1) - (p_{g,f}(z+i+1) - p_{h,g-f}(z+i+1)) = 1$ a $(f - (g-h))(z+i+1) = 0$ a $(h - (g-f))(z+i+1) = 1$.

Tým sme zistili, že $W = Z^+$. Z toho vyplýva, že $(h-(g-f))(z+n) = 1$ pre $n = 0, 1, 2, \ldots$. Teda $h - (g-f) \notin U$. Podľa tvrdenia 18 b) je $g - f \in U$, a teda aj $h - (g-f) \in U$. To je však spor.

Tým sme zistili, že nemôže existovať také $z \in Z$, že by $p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1) - (p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1)) = 1$. Preto $p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) \in \{-1, 0\}$ pre každé $z \in Z$.

Podobne odvodíme, že prípad existencie takého $z \in Z$, pre ktoré $p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) = -1$, vedie k sporu, totiž k tomu, že $f-(g-h) \notin U$.

Teda pre každé $z \in Z$ platí: $p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) = 0$. Z toho a z rovnosti (1) dostávame, že pre každé $z \in Z$ platí: $(f - (g-h))(z) - (h - (g-f))(z) = p_{g,h}(z) - p_{f,g-h}(z) - (p_{g,f}(z) - p_{h,g-f}(z)) = 2((p_{g,h}(z-1) - p_{f,g-h}(z-1)) - (p_{g,f}(z-1) - p_{h,g-f}(z-1))) = 0$, čiže $(f - (g-h))(z) = (h - (g-f))(z)$.

Tým sme dokázali, že $f-(g-h) = h-(g-f)$.

6. Konštrukcia úplnej lineárne usporiadanej v sebe hustej komutatívnej grupy pomocou celých čísel

Definície. Prvok $f \in U$ nazveme kladným vtedy a len vtedy, keď $f \neq \Phi$ a existuje také $x \in Z$, že $f(z)=0$ pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<x$. Prvok f nazveme záporným vtedy a len vtedy, keď $f \in U$, $f \neq \Phi$ a existuje také $x \in Z$, že $f(z)=1$ pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<x$.

Množinu $\{f \in U: f$ je buď kladný prvok, f je Φ, alebo f je záporný prvok$\}$ označme znakom R.

Tvrdenie 19. a) Nech f je buď kladný prvok alebo Φ a g je záporný prvok. Potom $f-g$ je kladný prvok.

b) Nech f je buď záporný prvok, alebo Φ a g je kladný prvok. Potom $f-g$ je záporný prvok.

c) Nech $f \neq g$ a buď f a g sú oba kladné prvky, alebo oba záporné prvky. Potom je buď $f-g$ kladným prvkom a existuje také $x \in Z$, že $f(x)>g(x)$ a $f(z)=g(z)$ pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<x$, alebo $f-g$ je záporný prvok a také $x \in Z$ neexistuje.

d) Nech $f, g \in R$. Potom $f-g \in R$ a $f-g=\Phi$ vtedy a len vtedy, keď $f=g$.

Dôkaz. a) Nech g je záporný prvok. Teda existuje také $x \in Z$, že $g(z)=1$ pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<x$.

Nech f je kladný prvok. Potom existuje také $u \in Z$, že $f(z)=0$ pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<u$. Nech $t=\min(x, u)$. Potom pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<t$, platí: $0=f(z)<g(z)=1$. Z toho a z definície $p_{f,g}$ vyplýva, že $p_{f,g}(z)=1$ pre každé $z \in Z$, pre ktoré $z<t-1$. Potom $(f-g)(z)=$

$=(f(z)-g(z)-p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (0-1-1)_{\mathrm{mod}\,2}=0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t-1$. Teda $f-g$ je kladný prvok.

Nech $f=\Phi$. Potom $0=f(z)<g(z)=1$ pre $z<x$. Z toho a z definície $p_{f,g}$ vyplýva, že $p_{f,g}(z)=1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x-1$. Teda $(f-g)(z) = (f(z)-g(z) - p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (0-1-1)_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x-1$. Z toho dostávame, že $f-g$ je kladný prvok.

b) Nech g je kladný prvok, t. j. existuje také $x\in Z$, že $g(z)=0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$.

Nech f je záporný prvok, t. j. existuje také $u\in Z$, že $f(z)=1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<u$. Nech $t=\min(z, u)$. Potom pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t$, platí: $0=g(z) < f(z)=1$. Z toho a z definície $p_{f,g}$ vyplýva, že $p_{f,g}(z)=0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t-1$. Z toho dostávame, že $(f-g)(z) = (f(z) - g(z) - p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (1-0-0)_{\mathrm{mod}\,2} = 1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t-1$. Teda $f-g$ je záporný prvok.

Nech $f=\Phi$. Potom z definície $p_{f,g}$ vyplýva, že $p_{f,g}(z)=1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$, pretože musí existovať $y\in Z$, pre ktoré $g(y)=1$ a zrejme $y\geqq x$. Z toho dostávame, že $(f-g)(z) = (f(z) - g(z) - p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (0-0-1)_{\mathrm{mod}\,2} = 1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$. Teda $f-g$ je záporný prvok.

c) Nech $f\neq g$ a nech f a g sú oba kladné prvky. Pretože $f\neq g$, existuje zrejme také $x\in Z$, že $f(z)=g(z)$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$ a $f(x)\neq g(x)$. Ďalej existuje také $t\in Z$, že $f(z)=g(z)=0$ pre $z\in Z$, pre ktoré $z<t$. Zrejme $t\leqq x$. Ak je $0=f(x)<g(x)=1$, je $p_{f,g}(z)=1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$. Teda $(f-g)(z)=(f(z)-g(z)-p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (-1)_{\mathrm{mod}\,2}=1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t$. Teda $f-g$ je záporný prvok. Ak $0=g(x) < f(x)=1$, je $p_{f,g}(z)=0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$. Teda v tomto prípade platí: $(f-g)(z) = (f(z)-g(z) - p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t$; čiže $f-g$ je kladný prvok. Teda tvrdenie c) v prípade, že $f\neq g$ a f a g sú oba kladné prvky, je dokázané.

Nech $f\neq g$ a f a g sú oba záporné prvky. Potom zasa existuje také $x\in Z$, že $f(z)=g(z)$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$ a $f(x)\neq g(x)$. Ďalej existuje také $t\in Z$, že $f(z) = g(z) = 1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t$. Zrejme $t\leqq x$. Nech nastane prípad, že $0=f(x) < g(x)=1$. Potom

$p_{f,g}(z)=1$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$. Teda pre $z\in Z$, pre ktoré $z<t$, platí: $(f-g)(z) = (f(z) - g(z) - p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (-1)_{\mathrm{mod}\,2} = 1$. Preto $f-g$ je záporný prvok. Nech nastane prípad: $0=g(x) < f(x)=1$. Potom $p_{f,g}(z)=0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<x$. Teda $(f-g)(z)= =(f(z) - g(z) - p_{f,g}(z))_{\mathrm{mod}\,2}=0$ pre každé $z\in Z$, pre ktoré $z<t$. Preto $f-g$ je kladný prvok. Tým sme dokázali tvrdenie c) aj v prípade, že $f\neq g$ a f a g sú oba záporné prvky.

d) Nech $f, g\in R$. Potom môže nastať práve jeden z nasledovných prípadov: α) $f=g$, β) $f\neq g$ a $g=\Phi$, γ) f je buď kladný prvok, alebo Φ a g je záporný prvok, δ) f je buď záporný prvok, alebo Φ a g je kladný prvok, ε) $f\neq g$ a buď f a g sú kladné prvky, alebo f a g sú záporné prvky. Potom $f-g\in R$, pretože v prípade α) je $f-g=\Phi\in R$, v prípade β) je $f-g= =f\in R$, v prípade γ) je podľa a) $f-g$ kladný prvok, a teda z R, v prípade δ) je podľa b) $f-g$ záporný prvok, a teda z R, v prípade ε) je podľa c) $f-g$ buď kladný prvok, alebo záporný prvok, a teda tiež z R.

Z prípadov α), β), γ), δ) a ε) vidieť, že pre $f, g\in R$ platí $f-g=\Phi$ vtedy a len vtedy, keď $f=g$.

Definície. Nech $f, g\in R$. Potom definujeme $f+g=f-(\Phi-g)$. Ďalej definujeme $f<g$ vtedy a len vtedy, keď $g-f$ je kladný prvok.

Tvrdenie 20. a) Nech $f, g\in R$. Potom nastane práve jeden z nasledovných prípadov: $f<g$, $f=g$ alebo $g<f$.

b) Nech $f\in R$. Potom f je kladný vtedy a len vtedy, keď $\Phi<f$.

c) Nech $f, g, h\in R$. Potom $f<h$, ak $f<g$ a $g<h$.

d) Nech $f, g\in R$. Potom $f+g\in R$.

e) Nech $f, g, h\in R$. Potom $f+h<g+h$ a $h-g<h-f$, ak $f<g$.

f) Nech A je neprázdna podmnožina množiny R. Nech A je zhora ohraničená, t. j. existuje také $f\in R$, že $g<f$ pre každé $g\in A$. Potom existuje také $h\in R$, že $g\leqq h$ pre každé $g\in A$ a pre každé $k\in R$, pre ktoré platí $g\leqq k$ pre každé $g\in A$, platí $h\leqq k$.

Dôkaz. a) Nech $f, g\in R$. Potom podľa tvrdenia 19 d) je $f-g\in R$. Teda je buď $f-g$ kladný prvok, alebo $f-g=\Phi$, alebo $f-g$ je záporný prvok. Ak $f-g$ je kladný prvok, je podľa definície $f>g$. Ak $f-g=\Phi$, je podľa tvrdenia 19 d) $f=g$. Ak $f-g$ je záporný prvok, je podľa tvrdenia 19 a) $\Phi-(f-g)$ kladný prvok. Podľa vety 12 je $g-f=g-(f-\Phi)= =\Phi-(f-g)$ kladný prvok. Teda $f<g$.

b) Pretože $f=f-\Phi$, je f kladný vtedy a len vtedy, keď $f-\Phi$ je kladný.

Prvok $f-\Phi$ je kladný vtedy a len vtedy, keď $\Phi<f$. Teda f je kladný vtedy a len vtedy, keď $\Phi<f$.

c) Nech $f, g, h \in R$, nech $f<g$, $g<h$. Potom $g-f$ a $h-g$ sú kladné prvky. Podľa vety 12 a tvrdenia 19 b) $g-h = g-(h-\Phi) = \Phi-(g-h)$ je záporný prvok. Podľa tvrdenia 19 b) a vety 12 je $h-f = h-(f-\Phi) = h-(f-(g-g)) = h-(g-(g-f)) = g-f-(g-h)$ je kladným prvkom, a teda $f<h$.

d) Nech $f, g \in R$. Pretože $\Phi \in R$, je podľa tvrdenia 19 d) $\Phi-g \in R$. Z toho a z tvrdenia 19 d) je $f+g = f-(\Phi-g) \in R$.

e) Nech $f, g, h \in R$ a $f<g$. Potom $g-f$ je kladným prvkom. Použitím vety 12 dostávame: $(g+h)-(f+h)=(g-(\Phi-h))-(f-(\Phi-h))= = (g-(\Phi-h))-(h-(\Phi-f)) = (\Phi-f)-(h-(g-(\Phi-h))) = = (\Phi-f)-(h-(h-(\Phi-g))) = (\Phi-f)-((\Phi-g)-(h-h)) = = (\Phi-f)-((\Phi-g)-\Phi) = (\Phi-f)-(\Phi-g) = = g-(\Phi-(\Phi-f)) = g-(f-(\Phi-\Phi)) = g-(f-\Phi) = g-f$. Teda $(g+h)-(f+h)$ je kladný prvok. Preto $f+h<g+h$.

Pretože $(h-f)-(h-g)=g-(h-(h-f))=g-(f-(h-h))=g- -(f-\Phi)=g-f$ a pretože $g-f$ je kladný prvok, je $(h-f)-(h-g)$ kladný prvok. Teda $h-g<h-f$.

f) Nech A je neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny R. Teda existuje také $f \in R$, že $g<f$ pre každé $g \in A$. Položme $B= =\{f-g\colon g \in A\}$. Pretože $g<f$ pre každé $g \in A$, je $f-g$ kladný prvok, a teda množina B obsahuje len kladné prvky. Nech $W = \{z \in Z\colon$ existuje také $h \in B$, že $h(u)=0$ pre $u<z$ a $h(z)=1\}$. Zrejme $W \neq \emptyset$, pretože $B \neq \emptyset$ a B obsahuje len kladné prvky. Môžu nastať dva prípady: buď je W zhora neohraničená, alebo je W zhora ohraničená.

Nech W nie je zhora ohraničená: V tomto prípade definujme $h_B=\Phi$. Zrejme $h_B \in R$.

Nech W je zhora ohraničená: Teraz budeme definovať h_B pomocou postupnosti prvkov. Pretože W je neprázdna zhora ohraničená množina celých čísel, má podľa vlastnosti (Z) maximum. Nech u je maximum množiny W, teda existuje také $h \in B$, že $h(z)=0$ pre $z<u$ a $h(u)=1$. Matematickou indukciou budeme definovať postupnosť $\{h_{u+n}\}_{n=0}^{\infty}$ kladných prvkov a postupnosť $\{B_{u+n}\}_{n=0}^{\infty}$ neprázdnych podmnožín množiny B, že platí: $h_{u+n}(z) = k(z)$ pre $z \leqq u+n$ pre každé $k \in B_{u+n}$, $h_{u+n}(z)=0$ pre

$z>u+n$, $B_{u+n+1} \subset B_{u+n}$ pre $n=0, 1, 2, \dots$ a pre každé $j \in B - B_{u+n}$ existuje také $t \in Z$, že $h_{u+n}(z) = j(z)$ pre $z<t$, $0 = h_{u+n}(t) < j(t) = 1$ a $t \leqq u+n$.

Pre $n=0$: Prvok h_u definujme tak, že $h_u(z) = h(z)$ pre $z \leqq u$, $h_u(z)=0$ pre $z>u$ a $B_u = \{k \in B: h_u(z) = k(z)$ pre $z \leqq u\}$. Pretože $h \in B_u$, je $B_u \neq \emptyset$. Zrejme h_u je kladný prvok. Zrejme $h_u(z) = k(z)$ pre $z \leqq u$ pre každé $k \in B_u$ a $h_u(z)=0$ pre $z>u$. Nech $j \in B - B_u$. Potom existuje také $w \in Z$, že $w \leqq u$ a $h_u(w) \neq j(w)$. Množina $\{q \in Z: h_u(q) \neq j(q)\}$ je neprázdna a zdola ohraničená, pretože h_u a j sú kladné prvky. Teda podľa vlastnosti (Z) má minimum. Označme to minimum ako t. Pretože $u = \max W$, $j \notin B_u$, je $t<u$. Teda $h_u(t)=0$, a preto musí byť $j(t)=1$. Preto $h_u(z) = j(z)$ pre $z<t$ a $0 = h_u(t) < j(t) = 1$.

Krok z n na $n+1$: Nech h_{u+n} a neprázdna množina B_{u+n} sú tak definované, že $h_{u+n}(z) = k(z)$ pre $z \leqq u+n$ pre každé $k \in B_{u+n}$ a $h_{u+n}(z)=0$ pre $z>u+n$ a pre každé $j \in B - B_{u+n}$ nech existuje také $t \in Z$, že $t \leqq u+n$, $h_{u+n}(z) = j(z)$ pre $z<t$ a $0 = h_{u+n}(t) < j(t)=1$. Teraz budeme definovať h_{u+n+1} a B_{u+n+1}.

Nech existuje taký prvok $k \in B_{u+n}$, že $k(u+n+1)=0$. Potom definujme funkciu $h_{u+n+1} = h_{u+n}$ a $B_{u+n+1} = \{j \in B_{u+n}: j(u+n+1) = 0\}$. Zrejme $k \in B_{u+n+1}$. Teda $\emptyset \neq B_{u+n+1} \subset B_{u+n}$. Nech $j \in B - B_{u+n+1}$. Potom je buď $j \in B - B_{u+n}$, alebo $j \in B_{u+n} - B_{u+n+1}$. V prvom prípade existuje také $t \in Z$, že $t \leqq u+n$, $h_{u+n+1}(z) = h_{u+n}(z) = j(z)$ pre $z<t$ a $0 = h_{u+n+1}(t) = h_{u+n}(t) < j(t) = 1$. Nech $j \in B_{u+n} - B_{u+n+1}$. Potom $h_{u+n+1}(z) = h_{u+n}(z) = j(z)$ pre $z \leqq u+n$ a $0 = h_{u+n+1}(u+n+1) < j(u+n+1) = 1$. Teda teraz môžeme za t brať číslo $u+n+1$.

Nech pre každý prvok $k \in B_{u+n}$ platí $k(u+n+1)=1$. Potom definujme $h_{u+n+1} \in R$ tak, že $h_{u+n+1}(z) = h_{u+n}(z)$ pre $z \leqq u+n$, $h_{u+n+1}(u+n+1) = 1$ a $h_{u+n+1}(z) = 0$ pre $z>u+n+1$. Množinu B_{u+n+1} položíme rovnú B_{u+n}. Nech $j \in B - B_{u+n+1} = B - B_{u+n}$. Potom existuje také $t \in Z$, že $t \leqq u+n$, $h_{u+n}(z) = j(z)$ pre $z<t$ a $0 = h_{u+n}(t) < j(t) = 1$. Teda aj $h_{u+n+1}(z) = h_{u+n}(z) = j(z)$ pre $z<t$, a $0 = h_{u+n}(t) = h_{u+n+1}(t) < j(t) = 1$.

Tým sme matematickou indukciou definovali postupnosti $\{h_{u+n}\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{B_{u+n}\}_{n=0}^{\infty}$ s požadovanými vlastnosťami. Všimnime si ešte, že $B_{u+n+1} = B_{u+n}$, ak $h_{u+n+1}(u+n+1) = 1$. Pomocou postupnosti $\{h_{u+n}\}_{n=0}^{\infty}$ budeme definovať funkciu h_B nasledovne: $h_B(z) = h_u(z)$ pre $z \leqq u$ a

$h_B(u+n) = h_{u+n}(u+n)$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$. Dokážeme, že prvok h_B je z R.

Najprv ukážeme, že $h_B \in U$. Nech totiž $h_B \notin U$. Potom by existovalo také $n \in Z^+$, že $h_B(u+k) = 1$ pre $k \geqq n$. Položme $V = \{i \in Z^+ : B_{u+n+i} = B_{u+n}\}$. Zrejme $0 \in V$.

Dôkaz, že z $i \in V$ vyplýva $i+1 \in V$: Pretože $h_{u+n+i+1}(u+n+i+1) = h_B(u+n+i+1) = 1$, je $B_{u+n+i+1} = B_{u+n+i}$. Keďže platí aj $B_{u+n+i} = B_{u+n}$ (pretože $i \in V$), platí $B_{u+n+i+1} = B_{u+n}$. Teda $i+1 \in V$.

Teda $V = Z^+$.

Nech $j \in B_{u+n}$ a $i \in Z^+$. Potom $j \in B_{u+n+i}$. Z toho dostávame, že $j(u+n+i) = h_{u+n+i}(u+n+i) = h_B(u+n+i) = 1$. Potom prvok j nie je z U, pretože $j(u+n+i) = 1$ pre $i = 0, 1, 2, \dots$. Pretože každý prvok z B bol kladný, čiže z R, a pretože $j \in B$, je aj $j \in R$. Tým sme dostali spor. Teda nemôže platiť $h_B \notin U$. Preto $h_B \in U$.

Pretože $h_B(z) = h_u(z) = 0$ pre $z < u$, je h_B kladným prvkom, a teda $h_B \in R$. Poznamenajme, že buď $h_B = \Phi$ (v prípade, že W bola zhora neohraničená), alebo h_B je kladný prvok (v prípade, že W bola zhora ohraničená).

Teraz ukážeme, že h_B má nasledujúce dve vlastnosti:

(inf 1): Pre každé $k \in B$ je $h_B \leqq k$.

(inf 2): Pre každé $j \in R$, pre ktoré $h_B < j$, existuje také $k \in B$, že $k < j$.

Dôkaz vlastnosti (inf 1): Ak W je zhora neohraničená, je $h_B = \Phi$. Pretože každý prvok z B je kladný, podľa b) platí $h_B = \Phi < k$ pre každé $k \in B$.

Nech W je zhora ohraničená. Nech $k \in B$. Potom môžu nastať dva prípady: buď $k \in B - B_u$, alebo $k \in B_u$.

Ak $k \in B - B_u$, existuje také $t \in Z$, že $t \leqq u$, $h_B(z) = h_u(z) = k(z)$ pre $z < t$ a $0 = h_B(t) = h_u(t) < k(t) = 1$. Preto $k - h_B \neq \Phi$ a $(k - h_B)(z) = (k(z) - h_B(z) - p_{k,h_B}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre $z < t-1$. Teda prvok $k - h_B$ je kladný, a preto $h_B < k$.

Nech $k \in B_u$. Označme $U = \{i \in Z^+ : k \in B_{u+i}\}$. Ak U je zhora neohraničená, musí byť $U = Z^+$, pretože $B_u \supset B_{u+1} \supset \dots \supset B_{u+i} \supset \dots$. Ak U je zhora ohraničená, má maximum (U je neprázdna, pretože $0 \in U$). Označme to maximum znakom m.

Nech U nie je zhora ohraničená. Potom platí $h_B(z) = h_u(z) = k(z)$ pre $z \leqq u$ a $h_B(u+n) = h_{u+n}(u+n) = k(u+n)$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$; použili sme to, že $k \in B_{u+n}$ pre každé $n \in Z^+$. Teda $h_B = k$.

Nech U je zhora ohraničená. Potom $k \in B_{u+m}$ a $k \notin B_{u+m+1}$. Pretože $B_{u+m+1} \neq B_{u+m}$, musí podľa definície h_{u+m+1} a B_{u+m+1} platiť, že $h_B(u + m+1) = h_{u+m+1}(u+m+1) = 0$ a $k(u+m+1) = 1$. Ďalej platí $h_B(z) = h_{u+m+1}(z) = h_{u+m}(z) = k(z)$ pre $z \leqq u+m$. Preto platí $p_{h_B,k}(z) = 1$ pre $z \leqq u+m$, a teda $(h_B - k)(z) = (h_B(z) - k(z) - p_{h_B,k}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (-1)_{\mathrm{mod}\,2} = 1$ pre $z \leqq u+m$. Prvok $h_B - k$ je záporný. Podľa vety 12 a tvrdenia 19 a) prvok $k - h_B = k - (h_B - \Phi) = \Phi - (h_B - k)$ je kladný, a teda $h_B < k$.

Vlastnosť (inf 2): Nech $j \in R$ a $h_B < j$. Zrejme prvok j je kladný. Pretože prvok j je kladný a h_B je buď kladný, alebo Φ, existuje také $t \in Z$, že $j(z) = h_B(z) = 0$ pre $z < t$. Pretože $h_B < j$, nie je $h_B = j$. Teda existuje také $x \in Z$, že $h_B(x) \neq j(x)$. Teda množina $V = \{v \in Z\colon h_B(v) \neq j(v)\}$ je neprázdna. Ale je aj zdola ohraničená, pretože pre $v \in V$ platí $t \leqq v$. Množina V má minimum, ktoré označme x. Potom platí $h_B(z) = j(z)$ pre $z < x$ a $h_B(x) \neq j(x)$. Z toho $p_{j,h_B}(z) = p_{j,h_B}(x-1)$ pre $z < x$. Pretože prvok $j - h_B$ je kladný, musí platiť $(j - h_B)(z) = (j(z) - h_B(z) - p_{j,h_B}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (j(x-1) - h_B(x-1) - p_{j,h_B}(x-1))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre $z < x$. Z toho $p_{j,h_B}(x-1) = 0$. Preto musí platiť $0 = h_B(x) < j(x) = 1$.

Ak W nie je zhora ohraničená, $h_B = \Phi$ a existuje taký prvok $k \in B$, že $k(z) = 0$ pre $z < y$, $k(y) = 1$ a $x < y$. Potom $j - k \neq \Phi$, pretože $0 = k(x) < j(x) = 1$. Pretože $(j-k)(z) = (j(z) - k(z) - p_{j,k}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre $z < x-1$, je $j - k$ kladný prvok. Preto $k < j$.

Nech W je zhora ohraničená. Pre $x \in Z$ môžu nastať dva prípady: buď $x < u$, alebo existuje také $n \in Z^+$, že $x = u + n$.

Nech $x < u$. Pretože $B_u \neq \emptyset$, existuje také k, že $k \in B_u$. Pre prvok k platí: $j(z) = h_B(z) = k(z)$ pre $z < x$ a $0 = k(x) < j(x) = 1$. Preto $j - k \neq \Phi$ a $(j-k)(z) = (j(z) - k(z) - p_{j,k}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (-p_{j,k}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre $z < x$. Teda $j - k$ je kladný prvok a $k < j$.

Nech existuje také $n \in Z^+$, že $x = u + n$. Pretože $B_{u+n} \neq \emptyset$ existuje také $k \in B_{u+n}$, že $k(z) = h_B(z)$ pre $z < x$ a $0 = h_B(x) = k(x) < j(x) = 1$. Pretože $j - k \neq \Phi$ a $(j - k)(z) = (j(z) - k(z) - p_{j,k}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = (-p_{j,k}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre $z < x$, je $j - k$ kladným prvkom. Preto $k < j$.

Tým je vlastnosť (inf 2) pre prvok h_B dokázaná.

Položme $h_A = f - h_B$. Zrejme $h_A \in R$. Potom pre každé $g \in A$ platí

$f-g \in B$, a teda $h_B \leqq f-g$. Ak $h_B = f-g$, je $g = g - (f-f) = f-(f-g) = f-h_B = h_A$. Ak $h_B < f-g$, tak podľa d) je $g = g - (f-f) = f-(f-g) < f-h_B = h_A$. Tým sme zistili, že pre každé $g \in A$ platí $g \leqq h_A$.

Nech $k \in R$ je také, že pre každé $g \in A$ platí $g \leqq k$. Pretože $k, h_A \in R$, podľa a) platí práve jeden zo vzťahov: $k < h_A$, $k = h_A$ a $h_A < k$. Ukážeme, že nemôže platiť $k < h_A$. Keby totiž platilo $k < h_A$, platilo by podľa d) $h_B = h_B - (f-f) = f - (f-h_B) = f-h_A < f-k$. Podľa vlastnosti (inf 2) prvku h_B existoval by taký prvok $j \in B$, že $j < f-k$. Ale potom by existoval taký prvok $g \in A$, že $j = f-g < f-k$. Z poslednej nerovnosti a z d) dostávame, že $g = g - (f-f) = f-(f-g) > f - (f-k) = k-(f-f) = k$. To je však spor, pretože podľa predpokladu musí platiť $g \leqq k$. Tým sme zistili, že pre k platí $h_A \leqq k$.

Ale potom množina A má vlastnosť (<3), pričom prvkom z je prvok h_A.

Veta 13. Množina R so súčtom $f+g = f-(\Phi - g)$ pre každé $f, g \in R$ a s usporiadaním $f < g$ vtedy a len vtedy, keď $g-f$ je kladný prvok, je úplná lineárne usporiadaná v sebe hustá komutatívna grupa.

Dôkaz. Na základe vety 2 a vety 12 dostávame, že R pri definícii súčtu, ako je definovaný vo vete 13, je komutatívna grupa, t. j. platí (+1), (+2), (+3). Tvrdenie 20 a) je vlastnosť (<2), tvrdenie 20 b) je vlastnosť (<1), v tvrdení 20 d) je obsiahnutá vlastnosť ($+<1$) a tvrdenie 20 e) je vlastnosť (<3).

Teda množina R pri súčte a usporiadaní uvedených vo vete 13 spĺňa vlastnosti (+1), (+2), (+3), (<1), (<2), ($+<1$) a (<3), a preto je úplná lineárne usporiadaná komutatívna grupa. Zostáva už len dokázať, že je v sebe hustá.

Nech teda $f, g \in R$ a $f < g$. Potom $g-f$ je kladný prvok. Teda $g-f \neq \Phi$ a existuje také $u \in Z$, že $(g-f)(z)=0$ pre $z<u$. Označme $V = \{x \in Z: (g-f)(z)=0 \text{ pre } z<x\}$. Keďže $u \in V$, je $V \neq \emptyset$. Pretože existuje také $y \in Z$, že $(g-f)(y)=1$, je $x \leqq y$ pre každé $x \in V$. Teda V je zhora ohraničená a má maximum, ktoré označme v. Zrejme $(g-f)(z)=0$ pre $z<v$ a $(g-f)(v)=1$. Potom definujme $h \in R$ nasledovne: $h(z)=0$ pre $z \leqq v$, $h(v+1)=1$ a $h(z)=0$ pre $z>v+1$. Zrejme h je kladný prvok, a teda $\Phi < h$. Pretože $p_{g-f,h}(z)=0$ pre $z<v$, je $((g-f)-h)(z) = ((g-f)(z) - h(z) - p_{g-f,h}(z))_{\mathrm{mod}\,2} = 0$ pre $z<v$. Teda $(g-f)-h$ je

kladný prvok, a teda $h<g-f$. Z toho dostávame, že $f+h \in R$ a $f<$ $<f+h<(g-f)+f=g$.

Tým je dokázané, že R je v sebe hustá, a veta 13 je dokázaná.

Literatúra

[1] Bruijn, N., G. de: Defining reals without use of rationals, Proc. of the Koninklijke Nederl. Akad. Wettensch. S. A. Math. Sc. 79, 1976, s. 100—108.

[2] Legéň, A.: O grupách a okruhoch I, II, Matematické obzory, 4, 1973, s. 27—46, a 5, 1974, s. 21—38.

[3] Mišík, L.: Netradičná konštrukcia reálnych čísel I, II a III, Matematické obzory, *14*(1979); *15*(1980) a *16*(1980), s. 7—22.