ALGEBRICKÉ KRIVKY II

JÁN ČIŽMÁR, Bratislava

4. Bod r-násobný. Dotyčnice krivky v r-násobnom bode

Ak je $[u]$ bod krivky $V(F)$ a $[v]$ ľubovoľný bod rôzny od bodu $[u]$, anulovanie niektorého výrazu $\left(\sum_{i=0}^{2} v_i \frac{\partial}{\partial S_i}\right)^r F(u)$ (pre niektoré $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$) môžu spôsobiť dvojaké okolnosti:

1. vzťah súradníc bodov $[u]$ a $[v]$;
2. súradnice bodu $[u]$, anulujúce všetky parciálne derivácie rádu r formy F.

Je očividné, že v druhom prípade sa uvedený výraz anuluje nezávisle od bodu $[v]$, a teda podmienky v bode 2 vyjadrujú určitú vlastnosť bodu $[u]$ a jeho význam na krivke.

Definícia 4. Bod $[u]$ krivky $V(F)$ sa nazýva *r-násobný* $(2 \leqq r)$, ak výrazy

$$\frac{\partial^s F}{\partial S_0^{i_0} \partial S_1^{i_1} \partial S_2^{i_2}}(u) \qquad (i_0 + i_1 + i_2 = s)$$

sa rovnajú nule pre každé celé nezáporné číslo $s \leqq r - 1$ a

$$\frac{\partial^r F}{\partial S_0^{r_0}\, \partial S_1^{r_1}\, \partial S_2^{r_2}}(u) \qquad (r_0 + r_1 + r_2 = r)$$

sa nerovná nule aspoň pre jednu takú skupinu (r_0, r_1, r_2), pre ktorú $r_0 + r_1 + r_2 = r$.

Poznámka 5. Je zrejmé, že krivka stupňa n neobsahuje bod násobnosti vyššej ako n.

Cvičenie

13. Pomocou Eulerovho vzorca ukázať, že prvú podmienku v definícii r-násobného bodu možno nahradiť podmienkou:

$$\frac{\partial^{r-1} F}{\partial S_0^{r_0'}\, \partial S_1^{r_1'}\, \partial S_2^{r_2'}}(n)=0$$

pre každú skupinu r_0', r_1', r_2' celých nezáporných čísel tej vlastnosti, že $r_0'+r_1'+r_2' = r-1$.

(Návod. Dokázať a použiť výsledok: Parciálna derivácia rádu r formy stupňa n je forma stupňa $n-r$; $0 \leqq r \leqq n$.)

Nech $[u]$ je r-násobný bod krivky (2) stupňa $n \geqq 2 (r \geqq n)$ a nech $[v]$ je bod rôzny od bodu $[u]$. Rovnica (9′) pre parametre spoločných bodov priamky $l \equiv [u][v]$ a krivky $V(F)$ má tvar

$$\begin{aligned} t_2^r\Bigg[\frac{1}{r!}\, t_1^{n-r}\Big(\sum_{i=0}^{2} v_i \frac{\partial}{\partial S_i}\Big)^r F(u) + \\ + \frac{1}{(r+1)!}\, t_1^{n-r-1} t_2 \Big(\sum_{i=0}^{2} v_i \frac{\partial}{\partial S_i}\Big)^{r+1} F(u) + \\ + \ldots + \frac{1}{n!}\, t_2^{n-r}\Big(\sum_{i=0}^{2} v_i \frac{\partial}{\partial S_i}\Big)^n F(u)\Bigg] = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

To znamená, že každá priamka idúca bodom $[u]$ má tento bod za aspoň r-násobný spoločný bod s krivkou $V(F)$. Aby bod $[u]$ bol spoločným bodom priamky l a krivky $V(F)$ viac ako r-násobným, je nevyhnutné a dostačujúce splnenie ďalšej podmienky, a to, aby bod $[v]$ vyhovoval rovnici

$$\Big(\sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial}{\partial S_i}\Big)^r F(u) = 0 \tag{26}$$

Priamka, ktorá má r-násobný bod $[u]$ krivky za spoločný bod s krivkou viac ako r-násobný, sa nazýva *dotyčnica krivky* v r-násobnom bode. Každý bod krivky (26) rôzny od bodu $[u]$ určuje s bodom $[u]$ priamku, ktorá je dotyčnicou krivky v r-násobnom bode $[u]$. Krivka definovaná rovnicou (26) je stupňa r a každým jej bodom rôznym od $[u]$ prechádza priamka — dotyčnica krivky v bode $[u]$. Preto má krivka (26) najviac r rôznych priamkových komponentov. Rovnica (26) je rovnica dotyčníc v r-násobnom bode $[u]$.

14. Dokážte: Ak má krivka stupňa n ($n \geqq 2$) n-násobný bod, je reducibilná a všetky jej komponenty sú priamky.

15. V usporiadaní rovnice krivky zostupne podľa mocnín neznámej x_0 (rovnica (6'))

a) zistite podmienky, aby bod $[o_0]=[1, 0, 0]$ bol r-násobný ($r \leqq n$);

b) nájdite rovnice dotyčníc v r-násobnom bode $[o_0]$.

16. Pre krivku v afinnej rovine, ktorej rovnica je napísaná v tvare súčtu homogénnych zložiek

a) zistite podmienky, aby bod $[0, 0]$ bol r-násobný ($r \leqq n$);

b) nájdite rovnice dotyčníc v r-násobnom bode $[0, 0]$.

Príklad 11. Asymptoty krivky v afinnej rovine

Nech $V(x_0)$ je nevlastná priamka roviny P^2 vzhľadom na afinnú rovinu A_0^2. Nech $V(F)$ je krivka v projektívnej rovine, $V(f)$ príslušná krivka v afinnej rovine. Spoločné body krivky $V(F)$ s priamkou $V(x_0)$ sú nevlastnými bodmi vzhľadom na krivku $V(f)$. Dotyčnice krivky $V(F)$ v týchto bodoch ako priamky afinnej roviny (pokiaľ sú rôzne od priamky $V(x_0)$) sa nazývajú asymptoty krivky $V(f)$.

Nevlastné body vzhľadom na krivku $V(f)$ sa dostanú dosadením $x_0=0$ do rovnice (2) a riešením rovnice

$$F(0, x_1, x_2)=0 \tag{27}$$

pre neznámy pomer $x_1:x_2$. Ak je rovnica splnená identicky, je priamka $V(x_0)$ komponentom krivky $V(F)$. Ak rovnica nie je splnená identicky, má najviac n rôznych koreňov $T_1:t_2$. Každý z nich určuje nevlastný bod $[0, t_1, t_2]$ krivky $V(F)$ (vzhľadom na afinnú rovinu).

Nech $t_1:t_2$ je jeden z koreňov rovnice (27).

a) Ak koreň $t_1:t_2$ je aspoň dvojnásobný, je bod $[0, t_1, t_2]$ buď aspoň dvojnásobný bod krivky $V(F)$, buď priamka $V(x_0)$ je dotyčnica krivky $V(F)$ v bode $[0, t_1, t_2]$.

b) Ak je koreň $T_1:t_2$ jednoduchý, bod $[0, t_1, t_2]$ je na krivke $V(F)$ jednoduchý a rovnica dotyčnice krivky $V(F)$ v tomto bode je

$$\sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial F}{\partial S_i}(0, t_1, t_2)=0 \tag{28}$$

V zostupnom usporiadaní rovnice krivky $V(F)$ podľa mocnín neznámej x_0 (rovnica (6')) sa nevlastné body dostanú riešením rovnice

$$u_n(x_1, x_2)=0 \tag{29}$$

Nech sú všetky korene tejto rovnice jednoduché; označme ich (t_1, t_2), (v_1, v_2), ..., (z_1, z_2). Potom $u_n(x_1, x_2)$ má rozklad

$$u_n(x_1, x_2)=(x_1t_2-x_2t_1)(x_1v_2-x_2v_1)\dots(x_1z_2-x_2z_1) \tag{30}$$

Ak má rovnica krivky tvar (6′), je

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial S_1}(0, t_1, t_2)=\frac{\partial^u n}{\partial S_1}(t_1, t_2),\\
\frac{\partial F}{\partial S_2}(0, t_1, t_2)=\frac{\partial^u n}{\partial S_2}(t_1, t_2)\\
\frac{\partial F}{\partial S_0}(0, t_1, t_2)=u_{n-1}(t_1, t_2)
\end{gathered} \tag{31}$$

Po dosadení týchto výrazov do rovnice asymptoty (28) je vidieť, že rovnica asymptoty závisí len od koeficientov foriem u_n, u_{n-1}.

Nech rozklad podielu $un : u_{n-1}$ na čiastkové zlomky má tvar

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}=\frac{a_1}{x_1t_2-x_2t_1}+\frac{a_2}{x_1v_2-x_2v_1}+\dots+\frac{a_n}{x_1z_2-x_2z_1} \tag{32}$$

$$u_{n-1}(t_1, t_2)=a_1(t_1v_2-t_2v_1)\dots(t_1z_2-t_2z_1) \tag{33}$$

Zároveň

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^u n}{\partial S_1}(t_1, t_2)=t_2(t_1v_2-t_2v_1)\dots(t_1z_2-t_2z_1)\\
\frac{\partial^u n}{\partial S_2}(t_1, t_2)=-t_1(t_1v_2-t_2v_1)\dots(t_1z_2-t_2z_1)
\end{gathered} \tag{34}$$

Z (33) a (34) vyplýva

$$t_2u_{n-1}(t_1, t_2)=a_1\frac{\partial^u n}{\partial S_1}(t_1, t_2), \quad -t_1u_{n-1}(t_1, t_2)=a_1\frac{\partial^u n}{\partial S_2}(t_1, t_2) \tag{35}$$

a) Ak $u_{n-1}(t_1, t_2)=0$, v rozvoji podielu $u_{n-1} : u_n$ na čiastkové zlomky musí byť $a_1=0$, lebo v rovnostiach (35) nemôže byť súčasne

$$\frac{\partial u_n}{\partial S_1}(t_1, t_2)=0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial u_n}{\partial S_2}(t_1, t_2)=0$$

pretože bod $[0, t_1, t_2]$ je jednoduchý.

Dosadením výrazov (34) a $u_{n-1}(t_1, t_2)=0$ do rovnice asymptoty (28) sa dostane

$$t_2x_1 - t_1x_2 = 0 \tag{36}$$

b) Ak $u_{n-1}(t_1, t_2) \neq 0$, dosadí sa (35) do (28) a po zjednodušení sa získa rovnica asymptoty

$$t_2x_1 - t_1x_2 + a_1x_0 = 0 \tag{37}$$

Analogické výsledky sa dostanú aj pre ďalšie korene $(v_1, v_2), \ldots, (z_1, z_2)$ a koeficienty $a_2, \ldots, a_n$.

Výsledok možno bez väčších úprav preniesť na krivku $V(f)$. Ak sa jej rovnica napíše v tvare

$$u_n(x, y) + u_{n-1}(x, y) + \ldots + u_0 = 0$$

a samé jednoduché korene rovnice

$$u_n(x, y) = 0$$

$$\text{sú } (x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots, (x^{(i)}, y^{(i)}), \ldots, (x^{(n)}, y^{(n)})$$

rovnice asymptot majú tvar

$$y^{(i)}x - x^{(i)}y + a_i = 0 \tag{38}$$

kde a_i majú zhodný význam ako v predchádzajúcom postupe.

Poznámka 6. Na zvýšenie názornosti a podporu geometrickej predstavy sa často používa znázornenie kriviek afinnej roviny. Možnosti znázorňovania v danej nákresni, ktorou je časť afinnej roviny nad poľom reálnych čísel, sú značne ohraničené, pretože 1. pole reálnych čísel nie je algebricky uzavreté, čo spôsobuje, že niektoré výsledky o algebrických krivkách, odvodené pre projektívnu rovinu nad algebricky uzavretým poľom, v tejto afinnej rovine neplatia a 2. modely projektívnych rovín nad algebricky uzavretými poliami, napr. už nad poľom komplexných čísel, sú komplikovanejšie, vyžadujú obšírnejší výklad, a inými oblasťami matematiky vypestovanú geometrickú predstavivosť sotva podporujú. Pokiaľ bude reč o znázorňovaní kriviek, bude sa pod tým rozumieť zobrazovanie tých bodov kriviek, v ktorých pomery homogénnych súradníc sú reálne čísla; stručne sa bude hovoriť o zobrazovaní „reálnej časti kriviek".

Príklad 12. Singulárne body a asymptoty krivky v afinnej rovine.

V projektívnej rovine nad poľom komplexných čísel je daná krivka $V(F)$ formou

$$F(S) = S_1^3 + S_2^3 - 3aS_0S_1S_2 \tag{39}$$

kde a je reálne číslo rôzne od nuly. V zostupnom usporiadaní podľa mocnín neznámej x_0 má krivka $V(F)$ rovnicu

$$0 \cdot x_0^3 + 0 \cdot x_0^2 + (-3ax_1x_2)x_0 + (x_1^3 + x_2^3) = 0 \tag{40}$$

teda pri obvyklom označení

$$\begin{gathered} u_0 = 0, \quad u_1(x_1, x_2) = 0, \quad u_2(x_1, x_2) = -3ax_1x_2, \\ u_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 \end{gathered} \tag{41}$$

Na základe cvičenia (15) by bolo možné z rovnice (40) zistiť vlastnosti bodu $[o_0] = [1, 0, 0]$ vo vzťahu ku krivke, a pri konštatovaní, že tento bod je bodom krivky, aj dotykový útvar krivky v tomto bode.

Riešením sústavy rovníc

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial S_0}(x) = -2ax_1x_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial S_1}(x) = 3x_1^2 - 3ax_0x_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial S_2}(x) = 3x_2^2 - 3ax_0x_1 = 0 \end{gathered} \tag{42}$$

sa však dostane množina *všetkých* singulárnych bodov krivky. Sústava (42) má jediný koreň, ktorého reprezentant je napr. (1, 0, 0), t. j. bod $[o_0]$ je jediný singulárny bod krivky. Je to práve dvojnásobný bod krivky, lebo napr.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S_1\, \partial S_2}(1, 0, 0) = -3a \neq 0$$

Rovnica dotyčníc v bode $[o_0]$ je podľa (26) (pre $[u]=[o_0]$)

$$-3ax_1x_2=0 \tag{43}$$

teda dotyčnice krivky $V(F)$ v bode $[o_0]$ sú dve rôzne priamky $V(x_1)$ a $V(x_2)$. Bod $[o_0]$ je tzv. *uzlový bod krivky* $V(F)$.

Spoločné body priamky $V(x_0)$ s krivkou $V(F)$ majú za súradnice reprezentantov korene rovnice

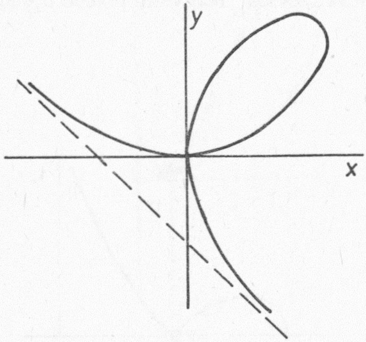
$$x_1^3+x_2^3=0 \tag{44}$$

Tieto korene sú $(0, 1, -1)$, $(0, 1+i\sqrt{3}, 2)$ a $(0, 1-i\sqrt{3}, 2)$. Rovnica dotyčnice krivky v bode $[0, 1, -1]$ je

$$ax_0+x_1+x_2=0 \tag{45}$$

Príslušná afinná krivka daná rovnicou

$$x^3+y^3-3axy=0 \tag{40}$$



Obr. 1

je známa pod názvom *Descartesov list (obr. 1).* Má dvojnásobný bod $[0, 0]$, dotyčnice krivky v ňom majú rovnice

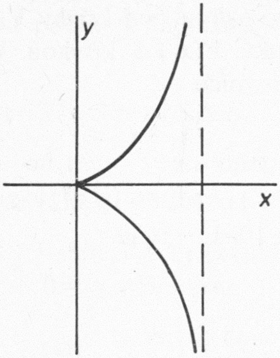
$$x=0, \quad y=0 \tag{43'}$$

a rovnica asymptoty je

$$x+y+a=0 \tag{45'}$$

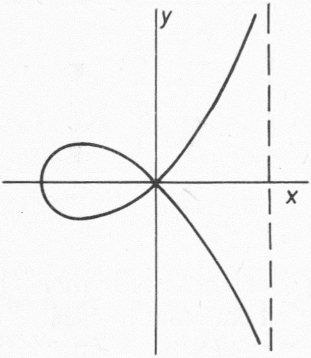
Cvičenia

Pri krivkách určených nasledujúcimi rovnicami nájdite singulárne body, zistite ich násobnosť, dotyčnice v nich, a ak má krivka asymptoty, nájdite ich rovnice.



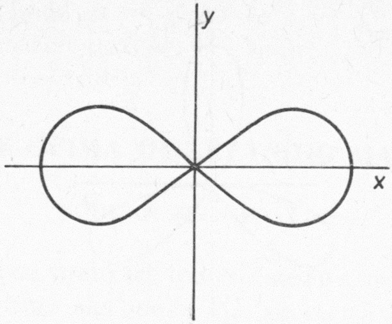
Obr. 2

17. $x^3 - y^2(a - x) = 0$.
(*Obr. 2 — Dioklova cissoida;* bod vratu prvého druhu)



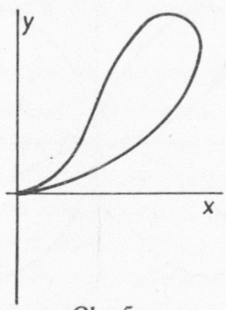
Obr. 3

18. $(a + x)x^2 - (a - x)y^2 = 0$
(*Obr. 3 — strofoida;* uzlový bod).



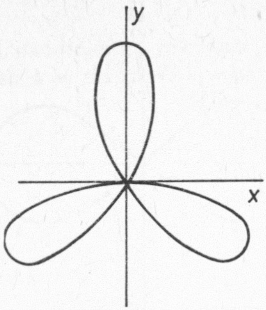
Obr. 4

19. $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$
(*Obr. 4 — Bernoulliho lemniskata;* uzlový bod)



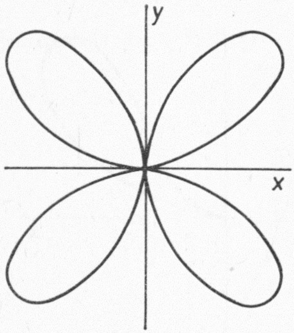
Obr. 5

20. $x^4+x^2y^2-2x^2y-xy^2+y^2=0.$
(*Obr. 5 — bod vratu druhého druhu*)



Obr. 6

21. $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$
(*Obr. 6 — trojnásobný bod*)



Obr. 7

22. $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$
(*Obr. 7 — štvornásobný bod*; splývajúce dvojice dotyčníc)