

## ROZHODOVANIE, HRY A EXPERIMENT II

ANDREJ PÁZMAN, Bratislava

### III. Jednoduchý model štatistického rozhodovania

**Definícia 4.** Jednoduchý model štatistického rozhodovania je štvorica

$$\{\Theta, A, L, (Z, \{p(\cdot | \vartheta), \vartheta \in \Theta\})\}$$

kde  $\Theta, A, Z$  sú množiny,  $L$  je reálna funkcia na  $\Theta \times A$  a pre každé  $\vartheta \in \Theta$ ,  $p(\cdot | \vartheta)$  je rozdelenie pravdepodobnosti na  $Z$  (presnejšie: na vhodne zvolenej  $\sigma$ -algebре podmnožín množiny  $Z$ ).  $\Theta$  sa nazýva množina stavov prírody,  $A$  je množina rozhodnutí,  $L$  je stratová funkcia (rozhodovateľa),  $Z$  sa nazýva priestor výsledkov experimentu  $a$  ( $Z, \{p(\cdot | \vartheta), \vartheta \in \Theta\}$ ) sa nazýva (štatistický) experiment.

V príklade 2 obchodník rozhoduje medzi dvoma alternatívami: alternatívou  $a_1$  — objednať zásielku, alternatívou  $a_2$  — neobjednať zásielku. Teda  $A = \{a_1, a_2\}$ . Symbolom  $\vartheta_1$  označíme slnečnú sezónu, symbolom  $\vartheta_2$  označíme daždivú sezónu. Teda  $\Theta = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ . Číslo  $L(\vartheta, a)$  musí vyjadriť stratu rozhodovateľa (obchodníka), ak  $\vartheta$  je stav prírody a  $a$  je rozhodnutie rozhodovateľa. Tabuľka stratovej funkcie v príklade 2 je:

	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$
$a_1$	- 5000	+ 2000
$a_2$	0	0

Obchodník pri svojom rozhodovaní používa predpoved meteorológov, ktorí namiesto neho vykonali experimenty, aby zistili počasie v letnej sezóne. Z pozície obchodníka sú dva možné výsledky experimentu meteorológov:  $z_1$  — predpoved slnečnej sezóny,  $z_2$  — predpoved daždivej sezóny;  $Z = \{z_1, z_2\}$ . Pritom

$$\begin{aligned} p(z_1 | \vartheta_1) &= 0,75; \quad p(z_1 | \vartheta_2) = 0,25 \\ p(z_2 | \vartheta_1) &= 0,25; \quad p(z_2 | \vartheta_2) = 0,75 \end{aligned}$$

**Definícia 5.** Rozhodovacia funkcia je zobrazenie množiny  $Z$  do množiny  $A$ . Rozhodovacia funkcia sa musí zvoliť tak, aby umožnila indukovať rozdelenie





Rozhodovacia funkcia, ktorá minimalizuje stredné riziko, sa nazýva Bayesova (pri apriórnom rozdelení  $\xi$ ).

V príklade 2 apriórne rozdelenie je  $\xi(\vartheta_1) = 2/3$  (relatívna početnosť slnečných sezón) a  $\xi(\vartheta_2) = 1/3$ . Stredné riziká sú  $R(\Delta_1) = -2666$ ,  $R(\Delta_2) = -2500$ ,  $R(\Delta_3) = 0$ . Teda optimálna (Bayesova) rozhodovacia funkcia predpisuje objednať zásielku bez ohľadu na predpovede meteorológov.

Obchodníka môže zaujímať stabilita optimálnej (Bayesovej) rozhodovacej funkcie pri zmene apriórneho rozdelenia pravdepodobnosti. Treba zistiť, pri akých rozdeleniach pravdepodobnosti  $\xi$

a)  $\Delta_1$  je bayesovská, alebo b)  $\Delta_2$  je bayesovská, alebo c)  $\Delta_3$  je bayesovská.

a) Riešením sú všetky  $\xi_1 \equiv \xi(\vartheta_1)$ ,  $\xi_2 \equiv \xi(\vartheta_2)$ , pre ktoré platí:

$$-5000 \xi_1 + 2000 \xi_2 = R(\Delta_1) \leq R(\Delta_2) = -3750 \xi_1 + 500 \xi_2$$

a

$$-5000 \xi_1 + 2000 \xi_2 = R(\Delta_1) \leq R(\Delta_3) = 0 ;$$

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = 1$$

Vyriešením týchto nerovníc dostaneme:

$$1 \geq \xi_1 \geq 6/11, \quad \xi_2 = 1 - \xi_1$$

b) Podobne z nerovníc

$$R(\Delta_2) \leq R(\Delta_1)$$

$$R(\Delta_2) \leq R(\Delta_3), \quad \xi_1 \geq 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = 1$$

dostaneme:

$$2/15 \leq \xi_1 \leq 6/11 ; \quad \xi_2 = 1 - \xi_1$$

c) Z nerovníc

$$R(\Delta_3) \leq R(\Delta_1) ; \quad R(\Delta_3) \leq R(\Delta_2)$$

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0 ; \quad \xi_1 + \xi_2 = 1$$

dostaneme:

$$0 \leq \xi_1 \leq 2/15 ; \quad \xi_2 = 1 - \xi_1$$

Vidíme, že rozhodovacia funkcia opatrného obchodníka je odôvodnená len vtedy, ak z 15 sezón bolo 13 daždivých.

V príklade v úvode článku množina  $\Theta$  je dvojprvková (Martin je v Bratislave alebo je v Trnave), podobne množina  $A$  (Jozef cestuje, resp. necestuje do



Z koeficientov  $f_0(t_i), f_1(t_i); i = 1, \dots, 5$  vytvoríme matice  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0(t_1) & f_1(t_1) \\ f_0(t_5) & f_1(t_5) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}' \mathbf{F} = \sum_{i=1}^5 f(t_i) f'(t_i)$$

kde ' označuje transpozíciu (výmenu riadkov za stĺpce).

Odhady  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$  budeme hľadať v tvare

$$\hat{a}_0 = \sum_{i=1}^5 l_i y_i ; \quad \hat{a}_1 = \sum_{i=1}^5 h_i y_i \quad (12)$$

kde  $l_1, \dots, l_5, h_1, \dots, h_5$  sú vhodne zvolené čísla. Tieto budeme voliť tak, aby

a) bolo zaručené, že stredné hodnoty odhadov  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$  sa rovnajú skutočným hodnotám parametrov

$$E\hat{a}_0 = a_0 ; \quad E\hat{a}_1 = a_1 \quad (13)$$

b) disperzie náhodných veličín  $\hat{a}_0, \hat{a}_1$  boli minimálne spomedzi všetkých náhodných veličín tvaru (12), ktoré spĺňajú rovnosti (13).

Podmienka a) zaručuje, že sa vyhneme tomu, čo sa nazýva systematická chyba, podmienka b) zaručuje, že tzv. náhodná chyba bude minimálna (v prímere).

**Veta 7.** Odhady, ktoré spĺňajú podmienky a), b), majú tvar

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}' \mathbf{y}$$

kde  $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_5)$

t. j. v (12) treba zvoliť

$$\begin{aligned} l_i &= \{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}'\}_{1i} ; & i &= 1, \dots, 5 \\ h_i &= \{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}'\}_{2i} ; & i &= 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (14)$$

Disperzie týchto odhadov sú diagonálne elementy matice  $\mathbf{M}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} D\hat{a}_0 &= \sigma^2 \{\mathbf{M}^{-1}\}_{11} \\ D\hat{a}_1 &= \sigma^2 \{\mathbf{M}^{-1}\}_{22} \end{aligned} \quad (15)$$

**Lema.** Nech  $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\mathbf{b}' = (b_1, \dots, b_m)$ . Potom

$$(\mathbf{a}' \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a}' \mathbf{a}) (\mathbf{b}' \mathbf{b}) \quad (16)$$

**Dôkaz.** Z elementárneho vzťahu  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$  ( $a, b$  = reálne čísla) vyplýva:

$$\frac{a_i^2}{\sum_{j=1}^m a_j^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{j=1}^m b_j^2} \geq 2 \left[ \frac{a_i b_i}{\sum_{j=1}^m a_j^2 \sum_{j=1}^m b_j^2} \right]^{1/2} \quad (17)$$

$$i = 1, \dots, m$$

Sčítame (17) podľa  $i$  a dostaneme :

$$\left( \sum_{i=1}^m a_i b_i \right) \leq \left[ \sum_{j=1}^m a_j^2 \sum_{j=1}^m b_j^2 \right]^{1/2}$$

z čoho vyplýva (16).

Dôkaz vety 7. Odhad  $\hat{a}_0 = \sum_{i=1}^5 l_i y_i$  má dosperziu

$$\begin{aligned} D\hat{a}_0 &= E \left[ \sum_{i=1}^5 l_i y_i - \sum_{i=1}^5 l_i s(t_i) \right]^2 = \\ &= \sum_{i,j=1}^5 l_i l_j E [y_i - s(t_i)] [y_j - s(t_j)] \end{aligned} \quad (18)$$

Ale

$$E [y_i - s(t_i)]^2 = \sigma^2 ; i = 1, \dots, 5 \text{ a}$$

$$E [y_i - s(t_i)] [y_j - s(t_j)] = 0 \text{ pre } i \neq j, i, j = 1, \dots, 5$$

(študenti pozorujú nezávisle, a preto výsledky pozorovaní sú nekorelované). Preto z (18) vyplýva :

$$D\hat{a}_0 = \sigma^2 I' I \quad (19)$$

kde sme použili zápis  $I' = (l_1, \dots, l_5)$

Rovnosti

$$s(t_i) = a_0 t_i + \frac{a_1}{2} t_i^2 ; \quad i = 1, \dots, 5 \quad (20)$$

sa pomocou maticovej symboliky a vzťahov  $E y_i = s(t_i); i = 1, \dots, 5$  dajú zapísat v tvare

$$E \mathbf{y} = \mathbf{F} \mathbf{a} \quad (21)$$

Ak využijeme (21) a vzťah  $a_0 = \mathbf{e}' \mathbf{a}$ , ľahko zistíme, že prvá z podmienok (13) je ekvivalentná podmienke : Pre každý dvojprvkový vektor  $\mathbf{a}$  platí :

$$\mathbf{e}' \mathbf{a} = I' \mathbf{F} \mathbf{a}$$

a teda je ekvivalentná podmienka

$$\mathbf{F}' I = \mathbf{e} \quad (22)$$



rozdelenie pravdepodobnosti  $\xi$  na množine  $T = \{t_1, \dots, t_p\}$  definovať normovanú informačnú maticu  $\mathbf{M}(\xi)$  vzťahom

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=1}^p \mathbf{f}(t_k) \mathbf{f}'(t_k) \xi(t_k) \quad (26)$$

Všimnime si, že rozdelenie pravdepodobnosti  $\xi$  presne určuje, v ktorých časových okamihoch máme merať. Ak  $\xi(t_i) = 0$ , tak v čase  $t_i$  nerobíme žiadne pozorovania. Ak  $\xi(t_i) > 0$ , tak v čase  $t_i$  robíme pozorovania, pričom počet týchto pozorovaní je úmerný číslu  $\xi(t_i)$ . Preto každé rozdelenie pravdepodobnosti  $\xi$  na množine  $\{t_1, \dots, t_p\}$  nazveme návrhom experimentu.

### Súvis s rozhodovacím modelom z časti III

Optimálny návrh na určenie parametrov  $a_0$  (počiatočnej rýchlosťi padajúceho telesa) je ten, ktorý minimalizuje

$$\{\mathbf{M}^{-1}(\xi)\}_{11}$$

Naproti tomu optimálny návrh na určenie parametrov  $a_1$  (gravitačného zrýchlenia) je ten, ktorý minimalizuje

$$\{\mathbf{M}^{-1}(\xi)\}_{22}$$

Sotva však nájdeme taký návrh experimentu  $\xi$ , ktorý súčasne minimalizuje oba diagonálne elementy matice  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$ . Navrhovateľ experimentu musí rozhodnúť, ktorý návrh experimentu sa má zvoliť, pričom nie je, ktorý z parametrov  $a_0$ ,  $a_1$  bude dôležitý. Formálne máme teda rozhodovací problém, podobný ako v III. časti a môžeme hľadať úplné množiny návrhov experimentov a prípustné návrhy experimentov.

Na rozdiel od obchodníka v príklade 2, vo všeobecnosti nemáme možnosť získať apriornu informáciu o tom, ktorý z parametrov  $a_0$ ,  $a_1$  bude dôležitejší, a musíme prejsť ku kompromisným kritériám optimality návrhu experimentu, ktoré zaručujú, že oba parametre budú dosť presne odhadnuté.

### Porovnanie kritérií optimality pomocou fundamentálnej vety teórie hier

**Kritérium *D*-optimality.** Návrh experimentu  $\xi^*$  je *D*-optimálny, ak

$$\det \mathbf{M}(\xi^*) = \max_{\xi \in \Xi} \det \mathbf{M}(\xi)$$

*Minimaxné kritérium optimality.* Návrh experimentu  $\xi$  je minimaxne optimálny, ak platí:

$$\max_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{f}(t_i) = \\ = \min_{\xi \in \Xi} \max_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{f}(t_i)$$

kde  $T = \{t_1, \dots, t_p\}$ .

Kritérium  $D$ -optimality je prirodzené, lebo čím väčší je  $\det \mathbf{M}(\xi)$ , tým menší je  $\det \mathbf{M}^{-1}(\xi) = [\det \mathbf{M}(\xi)]^{-1}$ , a teda ani diagonálne elementy matice  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$  nemôžu byť „priveľké“. Minimaxné kritérium vyžaduje podrobnejšie vysvetlenie. Podľa (20) môžeme písat

$$s(t_i) = \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{a}$$

Presnú hodnotu  $s(t_i)$  nepoznáme, môžeme ju však odhadovať podobne, ako odhadujeme parametre  $a_0, a_1$ . Ak v dôkaze 7 vety zameníme vektor  $\mathbf{e}$  za vektor  $\mathbf{f}(t_i)$  a zopakujeme celý dôkaz, zistíme, že disperzia odhadu pre  $s(t_i)$  je úmerná číslu

$$\mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{f}(t_i)$$

(porovnaj so vzťahom (25)). Teda

$$\max_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{f}(t_i)$$

je maximálna disperzia odhadnutej dráhy telesa.

Obe kritériá optimality zdanivo vôbec nesúvisia. V skutočnosti platí nasledujúca veta.

**Veta 8.** Nech existuje  $D$ -optimálny návrh experimentu  $\xi^*$  a minimaxne optimálny návrh experimentu  $\xi$  a nech existujú matice  $\mathbf{M}^{-1}(\xi^*)$  a  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$ . Potom návrh  $\xi$  je  $D$ -optimálny a návrh  $\xi^*$  je minimaxne optimálny.

**Dôkaz.** Nech  $\xi, \eta$  sú také návrhy experimentu, že existujú matice  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$ ,  $\mathbf{M}^{-1}(\eta)$ . Matica  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{M}(\eta)$  je pozitívne definitná, to znamená, pre každý nenulový vektor  $\mathbf{b}$  platí  $\mathbf{b}' \mathbf{A} \mathbf{b} > 0$ . (Dôkaz vyplýva v podstate z toho, že  $\mathbf{b}' \mathbf{M}(\xi) \mathbf{b} = \sum_{k=1}^p (\mathbf{b}' \mathbf{f}(t_k))^2 \xi(t_k) \geq 0$  pre každý vektor  $\mathbf{b}$ ). Matica  $\mathbf{A}$  má všetky vlastné hodnoty kladné (číslo  $\lambda$  je vlastné hodnota matice  $\mathbf{A}$ , ak existuje nenulový vektor  $\mathbf{b}$  taký, že  $\mathbf{A} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}$ ; počet lineárnych nezávislých vektorov  $\mathbf{b}$ , ktoré vyhovujú tejto rovnosti, nazýva sa násobnosťou vlastnej hodnoty  $\lambda$ ). Stopa matice  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Sp } \mathbf{A}$  je súčet diagonálnych elementov matice  $\mathbf{A}$ . Platí:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{\lambda} \lambda^{k_{\lambda}} \quad (27)$$

$$\text{Sp } \mathbf{A} = \sum_{\lambda} k_{\lambda} \lambda \quad (28)$$

$$\frac{1}{r} \text{Sp } \mathbf{A} \geq (\det \mathbf{A})^{1/r} \quad (29)$$

kde  $k_{\lambda}$  je násobnosť vlastnej hodnoty  $\lambda$ ,  $r$  je rozmer matice  $\mathbf{A}$  a súčin v (27) a súčet (28) prebieha cez všetky vlastné hodnoty matice  $\mathbf{A}$ . Nerovnosť (29) je dôsledkom rovností (27) a (28) a známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom.

Nech  $\varepsilon > 0$  je dané číslo. Označme  $\Xi_{\varepsilon}$  množinu všetkých návrhov experimentu  $\xi$  s vlastnosťou, že všetky vlastné hodnoty matice  $\mathbf{M}(\xi)$  sú väčšie ako  $\varepsilon$ . (Potom existuje aj matica  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$ ). Zvoľme  $\xi$  tak, aby  $\Xi_{\varepsilon} \neq \emptyset$  a uvažujme antagonistickú hru dvoch hráčov, v ktorej množiny stratégii oboch hráčov sú rovnaké a rovnajú sa  $\Xi_{\varepsilon}$ . Výplavná funkcia prvého hráča je  $H(\xi, \eta) = \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\eta)$ , kde  $\xi$  je stratégia hráča I,  $\eta$  je stratégia hráča II. Množina  $\Xi_{\varepsilon}$  je konvexná (zrejme) a je kompaktná (t. j. uzavretá a ohraničená) v  $p$ -rozmernom euklidovskom priestore. Funkcie  $H(., \eta)$  je lineárna na  $\Xi$ , pretože

$$\begin{aligned} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\eta) &= \sum_{i=1}^p \text{Sp } \{ \mathbf{f}(t_i) \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\eta) \} \xi(t_i) = \\ &= \sum_{i=1}^p \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\eta) \mathbf{f}(t_i) \xi(t_i) \end{aligned} \quad (30)$$

Funkcia  $H(\xi, .)$  je konvexná na  $\Xi_{\varepsilon}$  (porovnajte: reálna funkcia  $f : x \in (0, 1) \rightarrow x \in (0, 1)$  je lineárna a funkcia  $\varphi : x \in (0, 1) \rightarrow \frac{1}{x} \in (1, \infty)$  je konvexná).

Podľa 3. vety hra  $(\Xi_{\varepsilon}, \Xi_{\varepsilon}, H)$  má hodnotu  $v_{\varepsilon}$  a obaja hráči majú rovnovážne stratégie  $\xi_{\varepsilon}$ ,  $\eta_{\varepsilon}$ .

Označme  $\xi^*$  D-optimálny návrh a  $\xi$  minimaxne optimálny návrh a nech  $\varepsilon > 0$  je tak zvolené, že  $\xi^*, \xi \in \Xi_{\varepsilon}$ . Platí:

$$r = \text{Sp } \mathbf{M}(\xi_{\varepsilon}) \mathbf{M}^{-1}(\xi_{\varepsilon}) \quad (\text{stopa jednotkovej matice})$$

$$\geq \inf_{\eta \in \Xi_{\varepsilon}} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi_{\varepsilon}) \mathbf{M}^{-1}(\eta) = v_{\varepsilon} \quad (\text{veta 2})$$

Podobne

$$r = \text{Sp } \mathbf{M}(\eta_{\varepsilon}) \mathbf{M}^{-1}(\eta_{\varepsilon})$$

$$\leq \sup_{\xi \in \Xi_r} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\eta_e) = v_e$$

a teda

$$r = v_e \quad (31)$$

Ďalej platí:

$$\begin{aligned} 1 &\leqq \left[ \frac{\det \mathbf{M}(\xi^*)}{\det \mathbf{M}(\tilde{\xi})} \right]^{1/r} \quad (\xi^* \text{ je } D\text{-optimálny}) \\ &\leqq \frac{1}{r} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi^*) \mathbf{M}^{-1}(\tilde{\xi}) \quad (\text{nerovnosť (29)}) \\ &\leqq \frac{1}{r} \sup_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\tilde{\xi}) \mathbf{f}(\tilde{\xi}) \mathbf{f}(t_i) \quad (\text{podľa (30)}) \\ &= \frac{1}{r} \inf_{\eta \in \Xi_r} \sup_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\eta) \mathbf{f}(t_i) \quad (\tilde{\xi} \text{ je minimaxne optimálny}) \\ &= \frac{1}{r} \inf_{\eta \in \Xi_r} \sup_{\xi \in \Xi_r} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\eta) \quad (\text{podľa (30)}) \\ &= \frac{v_e}{r} = 1 \quad (\text{podľa (31)}) \end{aligned}$$

Posledné nerovnosti sú teda rovnosti. Zo získanej rovnosti

$$\frac{\det \mathbf{M}(\xi^*)}{\det \mathbf{M}(\tilde{\xi})} = 1$$

vyplýva, že  $\tilde{\xi}$  je  $D$ -optimálny návrh. Ďalej platí podľa (29)

$$\begin{aligned} &\sup_{\xi \in \Xi_r} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\xi^*) \\ &\leqq r \sup_{\xi \in \Xi_r} \left[ \frac{\det \mathbf{M}(\xi)}{\det \mathbf{M}(\xi^*)} \right]^{1/r} = r \end{aligned}$$

a teda z 2. vety vyplýva, že  $\xi^*$  je rovnovážna stratégia hráča II. Preto platí:

$$\begin{aligned} \min_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\xi^*) \mathbf{f}(t_i) &= \sup_{\xi \in \Xi_r} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\xi^*) \\ &= \inf_{\xi \in \Xi_r} \sup_{\xi \in \Xi_r} \text{Sp } \mathbf{M}(\xi) \mathbf{M}^{-1}(\eta) \\ &= \inf_{\eta \in \Xi_r} \max_{t_i \in T} \mathbf{f}'(t_i) \mathbf{M}^{-1}(\eta) \mathbf{f}(t_i) \end{aligned}$$

Návrh  $\xi^*$  je teda minimaxne optimálny. Veta je dokázaná.

Citateľ môže nájsť metódy výpočtu optimálnych návrhov experimentov podľa rôznych kritérií v [3, 4].

**Záver.** Článok splnil svoj zámer, ak sa podarilo ukázať, že teóriu hier možno motivovať jednoduchými príkladmi, ale že matematický aparát teórie hier je efektívny nástroj aj na riešenie zložitejších úloh (veta 8).

## LITERATÚRA

1. Blackwell, D. — Girshick, M. A.: Teória her a statistického rozhodování. 1. vydanie. Praha, ČSAV 1964.
2. Brunovský, P.: O minimách, maximách a ich hľadaní. Matematické obzory 1975, 8, 43—50.
3. Fedorov, V. V.: Teoriya optimačnogo experimenta. 1. vydanie. Moskva, Nauka 1971.
4. Fedorov V. V. — Pázman, A.: Design of physical experiments (statistical methods). Fortschritte der Physik, 1968, 16, 325—355.
5. Chobot, M.: Teória hier (učebný text). Bratislava, Edič. stred. VŠE 1973.
6. Maňas, M.: Teória her a optimálneho rozhodování. 1. vydanie. Praha, SNTL 1974.
7. Pázman, A.: Teória hier a štatistického rozhodovania (učebný text). Bratislava, Edič. stred. RUK 1975.
8. Turnovec, F. — Chobot, M.: Teória hier. 1. vydanie. Bratislava, SPN 1967.
9. Winkelbauer, K.: Strategické hry. Príloha čas. Kybernetika, roč. 1967—68.