MATEMATICKÉ OBZORY 17/1981

EINSTEINOVE ČÍSLA

JÁN ŠIPOŠ, JURAJ VANTUCH

Za detských čias nás mnohých trápila táto otázka: Ak ideme člnom po jazere rýchlosťou 50 km/h a vrhneme v smere pohybu člna kameň rýchlosťou 30 km/h, poletí rýchlosťou 30 km/h alebo 80 km/h? Neskôr sme pochopili, že otázka je zle položená. 30 km/h vzhľadom na čln! 80 km/h vzhľadom na breh! Všetko bolo teda jasné. Keď sme sa dopočuli, že svetlo drží rýchlosťou 300 000 km/s svetový rekord, zamysleli sme sa a poľahky vyvrátili „bludy", ktoré hlása Einstein a jeho teória relativity: Ak by totiž čln išiel rýchlosťou 200 000 km/s a kameň vrhneme rýchlosťou 200 000 km/s, potom je zrejmé, že kameň poletí (vzhľadom na breh) rýchlosťou 400 000 km/s. Trocha nám prekážalo, že sme v učebniciach a inej literatúre opäť našli, že maximálna možná rýchlosť je 300 000 km/s a ani o chlp viac.

Spýtali sme sa teda starších. Tí nám začali rozprávať o časopriestore, jeho zakrivení a nakoniec nám prezradili, že rýchlosť kameňa vzhľadom na breh treba počítať podľa vzorca

$$x \oplus_c y = \frac{x+y}{1+\frac{x\cdot y}{c^2}}$$

kde $c = 300\,000$ km/s je rýchlosť svetla.

$$200\,000 \oplus_c 200\,000 = \frac{200\,000 + 200\,000}{1+\frac{200\,000\cdot 200\,000}{300\,000^2}} \doteq 276\,923$$

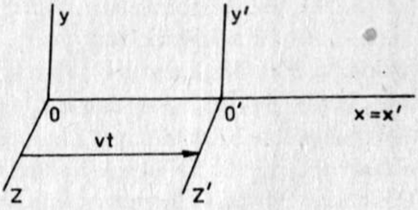
Teda dvestotisíc a dvestotisíc nie je štyristotisíc ale 276 923.

Pretože sa iste nájde aspoň jeden fyzik, ktorý bude tvrdiť, že rýchlosť svetla nie je presne 300 000 km/s, zvoľme radšej rýchlosť svetla za jednotku rýchlosti. Potom všetky možné rýchlosti telies s nenulovou pokojovou hmotnosťou tvoria interval $(-1, 1)$ a rýchlosti sa sčitujú takto:

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Každý sa môže presvedčiť, že množina $(-1, 1)$ je vzhľadom na operáciu $\oplus$ uzavretá *(cvičenie 1)*, a že rýchlosť svetla je skutočne maximálna možná rýchlosť (t. j. $u \oplus 1 = 1$ pre každé $u \in (-1, 1)$). Odkiaľ sa však vzalo to čudné sčitovanie rýchlosti? — vypytovali sme sa zdesene.

Pokúsme sa teda pozrieť, prečo sa sčitujú v teórii relativity rýchlosti práve tak, ako sme to vyššie uviedli.



Obr. 1

Vráťme sa na začiatok. Sme teda na jazere v člne pohybujúcom sa konštantnou rýchlosťou v. Zvoľme dve súradnicové sústavy S a S' *(obr. 1)*. S nech je pevne spojená s brehom, pričom S' sa pohybuje pozdĺž kladného smeru spoločnej osi $x = x'$ konštantnou rýchlosťou v (rýchlosť člna).

Ak bod B má v súradnicovej sústave S súradnice (x, y, z), resp. (x, y, z, t), potom Galileiho transformačné vzťahy od S k S', udávajúce súradnice (x', y', z'), resp. (x', y', z', t') bodu B vzhľadom na S', majú tvar:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (t' = t)$$

V skutočnosti však platia Lorentzove transformačné vzorce (rýchlosť svetla kladieme ako jednotkovú):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Keďže rýchlosť sústavy S' vzhľadom na S je v, potom rýchlosť S vzhľadom na S' je $-v$ a Lorentzove transformačné vzťahy od S' k S sú:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}},\ y=y',\ z=z',\ t=\frac{t'+vx'}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1}$$

čo možno získať priamo z predchádzajúcich vzťahov.

Predpokladajme teraz, že nejaký hmotný bod (kameň) sa pohybuje vzhľadom na sústavu S' (čln) rýchlosťou u. Úlohou je zistiť, aká je jeho rýchlosť vzhľadom na breh (sústava S). Označme túto rýchlosť w. V klasickej mechanike platí $w=u+v$. Ako je to v teórii relativity? Vieme, že $\text{rýchlosť}=\frac{\text{dráha}}{\text{čas}}$. Vzhľadom na breh teda

$$w=\frac{x}{t} \tag{2}$$

Z člna (sústava S') vidíme odlietať kameň rýchlosťou $u=\frac{x'}{t'}$, teda $x'=ut'$. Tento vzťah dosadíme do (1), čím dostaneme

$$x=\frac{ut'+vt'}{\sqrt{1-v^2}},\quad t=\frac{t'+vut'}{\sqrt{1-v^2}}$$

Po dosadení do (2) máme

$$w=\frac{\dfrac{ut'+vt'}{\sqrt{1-v^2}}}{\dfrac{t'+uvt'}{\sqrt{1-v^2}}}=\frac{ut'+vt'}{t'+uvt'}=\frac{u+v}{1+uv}$$

a teda

$$w=\frac{u+v}{1+uv}$$

Tento vzťah vyjadruje relativistický zákon skladania rýchlosti.

Na Einsteinovu počesť sa čísla z množiny $(-1,1)$ s operáciou $\oplus$ nazývajú Einsteinove čísla (pozri [1]). Ich vlastnosťami sa zaoberajú *cvičenia 2, 3 a 4.*

Dozvedeli sme sa teda, že rýchlosti sa sčitujú takto: $\oplus$, a nie takto: $+$. Ale prečo platia práve Lorentzove a nie Galileiho transformačné rovnice?

A vôbec, prečo nie nejaké iné, čo keď zajtra niekto vymyslí nejaké ďalšie?

Dočítali sme sa, že Lorentzova transformácia je jediná netriviálna transformácia (s podmienkou $y' = y$, $z' = z$), ktorá zachováva kvadratickú formu

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

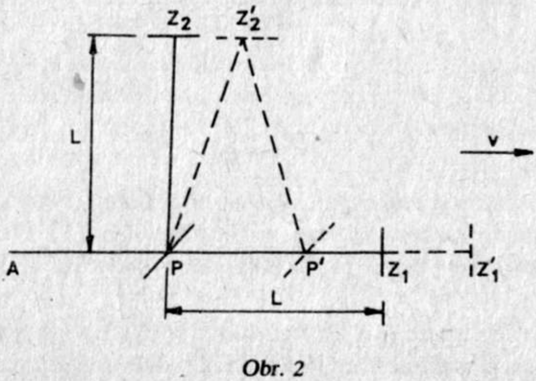
v štvorrozmernom priestore. (V [3] str. 88—91, čitateľ nájde vhodný výklad.)

Keďže nás to nepresvedčilo, dodali starší asi toto:

Pri objavení elektromagnetických vĺn sa myslelo, že vlny sa môžu šíriť — podobne ako zvuk — len v nejakom prostredí. Toto prostredie dostalo názov éter. Pomocou zvukových vĺn vieme experimentálne zistiť rýchlosť dopravného prostriedku, ktorý sa pohybuje vzhľadom na nepohyblivý vzduch.

Ak letíme vysoko nad mračnami na zázračnom koberci a nemáme možnosť komunikovať so zemou, aj vtedy môžeme odmerať rýchlosť koberca. Napríklad takto: Z konca koberca vypustíme v smere jazdy zvukový signál, ktorý sa odrazí od „zvukového zrkadla" pripevneného na začiatku koberca. Odmeriame čas, ktorý náš signál potrebuje na cestu tam a späť. Bude to viac, ako keby koberec stál. Z rozdielu sa principiálne dá zistiť rýchlosť koberca vzhľadom na vzduch (ak je menšia ako rýchlosť zvuku).

Podobnú metódu chceli Michelson a Morley použiť v r. 1887 na



Obr. 2

stanovenie rýchlosti zemegule vzhľadom na éter *(obr. 2)*.

Prístroj sa pohybuje v smere šípky rýchlosťou v. Z bodu A vypustíme svetelný lúč na polozrkadlo P, ktoré lúč rozdelí. Jeden lúč pôjde ďalej do zrkadla Z_1 a druhý kolmo hore do zrkadla Z_2. Vypočítajme čas t_1 potrebný na to, aby svetlo došlo od P k Z_1. (Rýchlosť svetla naďalej považujeme za jednotkovú.) Vzdialenosť P a Z_1 je síce L, ale kým svetlo dobehne Z_1, Z_1 sa posunie o dráhu vt_1, teda svetlo potrebuje ubehnúť dráhu $L + vt_1$. Keďže ide rýchlosťou $c = 1$, dostávame $1 \cdot t_1 = L + vt_1$, z čoho

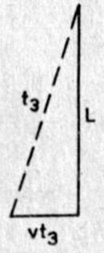
$$t_1 = \frac{L}{1 - v}$$

Podobne vypočítame čas t_2 potrebný na cestu späť zo Z_1 (presnejšie Z_1') do P (presnejšie P'). Teraz ide P naproti lúču, ktorý teda musí prejsť dráhu $L - vt_2$. Keďže svetlo ide rýchlosťou $c = 1$, máme $1 \cdot t_2 = L - vt_2$, z čoho

$$t_2 = \frac{L}{1 + v}$$

Z výrazov pre t_1 a t_2 dostávame, že lúč sa vráti do P (cez Z_1) za čas

$$t_1 + t_2 = \frac{L}{1 - v} + \frac{L}{1 + v} = \frac{2L}{1 - v^2}.$$



Obr. 3

Vypočítajme teraz čas t_3 potrebný na prejdenie dráhy od P do Z_2 (presnejšie od P do Z_2'). Z trojuholníka *(obr. 3)* dostávame $t_3^2 = L^2 + (vt_3)^2$, z čoho

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{1-v^2}}$$

Cesta naspäť trvá zrejme rovnako dlho, teda sa lúč vráti do P (cez Z_2) za čas

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{1-v^2}}$$

Z vyjadrenia $t_1 + t_2$ a $2t_3$ je jasné, že $t_1 + t_2 \neq 2t_3$, avšak nijaký rozdiel sa nepodarilo namerať. Michelsonovi a Morleymu sa teda ich pôvodný úmysel (zmerať rýchlosť zemegule vzhľadom na éter) nepodarilo uskutočniť. Ich neúspech vyvolal pochybnosti o základných princípoch fyziky. Prvý krok k riešeniu problému navrhol Lorentz. Podľa jeho predstáv sa vzdialenosť $L = PZ_1$ v smere pohybu skráti na L_v natoľko, že $t_1 + t_2 = 2t_3$ (po dosadení L_v za L). Čiže musí platiť

$$L_v = L\sqrt{1-v^2}$$

Čln sa pohybuje v smere osi $x = x'$. Preto sa súradnica x' kameňa vzhľadom na čln (súradnicová sústava S') vzhľadom na pozorovateľa na brehu (sústava S) skráti, a treba ju nahradiť $x'\sqrt{1-v^2}$. Teda dostávame

$$x'\sqrt{1-v^2} = x - vt$$

z čoho

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$$

čím sa dostaneme k Lorentzovej transformácii dĺžky, čo aspoň čiastočne môže uspokojiť našu zvedavosť.

Lorentzova myšlienka o skracovaní dĺžok bola iba prechodom k Einsteinovej analýze pojmov priestoru a času. V tejto analýze sa ukázalo, že konštantnosť rýchlosti svetla vedie priamo k relatívnosti súčasnosti, čo je kľúčom na pochopenie teórie relativity.

Čitateľa, ktorý nemá rád len čiastočné zodpovedanie otázky, a teda ani čiastočné uspokojovanie zvedavosti, upozorňujeme na [4], [5] a najmä na sériu článkov V. Černého Teória relativity — věc jednoduchá, ale rafinovaná, ktoré vyšli v roku 1980 v Rozhledoch matematicko-fyzikálnych.

Cvičenia

1. Ukážte, že ak $x, y \in (-1, 1)$, tak $x \oplus y \in (-1, 1)$.
2. Ukážte, že operácia $\oplus$ je asociatívna na $(-1, 1)$.
3. Ukážte, že $((-1, 1), \oplus)$ je komutatívna grupa.
4. Ukážte, že Einsteinove čísla tvoria topologickú grupu, t. j. ak $x_n \to x$ a $y_n \to y$, tak $x_n + y_n \to x + y$.
5. Ukážte, že Lorentzove transformačné rovnice zachovávajú kvadratickú formu $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Literatúra

[1] Baker, G. A.: Einstein numbers. Math. notes (January 1954, 39—41).
[2] Feynman, R. P.—Leighton, R. B.—Sands, M.: The Feynman Lectures on Physics. Vol. I. Addision — Wesley P. C., Massachusetts. (V krátkom čase vyjde slovenský preklad.)
[3] Kac, M.—Ulam, S. M.: Matematika a logika. SNTL Praha 1977.
[4] Landau, L.—Lifšic, E.: Čo je to teória relativity. ALFA Bratislava 1975.
[5] Orear, J.: Základy fyziky. ALFA Bratislava 1975.