MATEMATICKÉ OBZORY 12 1978

RELACE TOLERANCE

JIŘINA PLAČKOVÁ, Brno

Úvod

Jeím ze stěžejních pojmů současné matematiky, a tedy i modernizovaného kursu školské matematiky, je pojem *relace*. Z jednotlivých druhů relací se obvykle větší pozornost věnuje relaci ekvivalence a uspořádání, zatímco *tolerance* (relace, která je reflexivní a symetrická) se neuvádí, ačkoliv řada příkladů dokazuje životnost tohoto pojmu. Název *relace tolerance* pochází od anglického topologa E. ZEEMANA.

Zaměřila jsem se na pojem relace tolerance a její základní vlastnosti v rozsahu, který by podle mého soudu byl únosný pro žáky gymnázií. Toto téma by mohlo např. tvořit část náplně předmětu *matematický seminář*, který je v současné době na gymnáziích zaveden. Způsob výkladu je tedy volen tak, aby pokud možno vyhovoval studentům, nikoliv fundovaným matematikům.

1. Binární relace v množině

Pojem relace vznikne zpřesněním běžně používaného pojmu vztah. Definici binární relace lépe pochopíme, uvedeme-li si nejdříve jednoduché příklady.

Uvažujme množinu $M = \{a, b, c, d, e\}$, jejímiž prvky jsou namátkou vybraní žáci jedné třídy jistého gymnázia. V této skupině žáků se během studia vytvořily určité vztahy. Všimněme si např. vztahu, který je dán tím, jak si žáci pomáhají při studiu. Žák a, který má nejlepší prospěch ve všech předmětech, pomáhá všem ostatním, s výjimkou žáka d, který pomoci nevyžaduje a ani sám nikomu nepomáhá. Žáci b, c si pomáhají navzájem a kromě toho žák c pomáhá žáku e. Abychom se vyjadřovali stručněji, můžeme místo věty „žák x pomáha žáku y" zapsat xPy. Uvedený vztah budeme mít též jednoznačně určen, vypíšeme-li všechny uspořádané dvojice žáků, kde první v dvojici pomáhá druhému. Získame tak množinu dvojic, kterou můžeme označit též P ve shodě se zápisem xPy:

$$P = \{(a,b), (a,c), (a,e), (b,c), (c,b), (c,e)\}$$

V dané číselné množině si zaveďme vztah D takto: Řekneme, že číslo x je ve vztahu D k číslu y, právě když x je dělitelno y. Nechť $M = \{2, 3, 6, 11, 22, 60\}$. Pak vztah D můžeme charakterizovat množinou

$$D = \{(2,2), (3,3), (6,2), (6,3), (6,6), (11,11), (22,2), (22,11), (22,22), (60,2), (60,3), (60,6), (60,60)\}$$

kde vždy první číslo v každé dvojici je dělitelno druhým.

Z uvedených příkladů je patrno, že nedefinovaný a běžně používaný pojem vztah se dá charakterizovat určitou množinou uspořádaných dvojic. Pro ni zavedeme nový název — *relace*.

Přejdeme nyní k přesným definicím. Všude v textu budou definice zkráceně označovány D, věty V.

D. 1.1. Nechť je dána množina M. Množina všech uspořádaných dvojic (x,y), kde $x, y \in M$, se nazýva *kartézský čtverec množiny M* a označuje se $M \times M$.

D. 1.2. Říkáme, že R je *binární relace v M,* jestliže platí $R \subset M \times M$. Jestliže $(x,y) \in R$, říkáme, že *x je s y v relaci R* a zapisujeme též xRy. Prázdná relace se označuje 0, relaci $M \times M$ nazveme *plná relace* a označíme V, diagonální relace je relace $E = \{(x,x);\ x \in M\}$.

Poznámka

1. Všude v textu zápis $A \subset B$ znamená neostrou inkluzi, t. j. zahrnuje i případ $A = B$.

2. Množinu všech částí $M \times M$, tedy množinu všech binárních relací v M, budeme označovat $P(V)$.

3. Budeme-li v dalším textu hovořit o relacích, budeme tím vždy rozumět binární relace.

Připomeňme si pojem *zobrazení množiny M do sebe.* Každému prvku množiny M je přiřazen právě jeden prvek téže množiny M. Zobrazení je možno definovat jako relaci R, při čemž xRy, právě když prvek y je obrazem prvku x a přitom ke každému prvku $x \in M$ existuje právě jeden prvek $y \in M$ tak, že xRy. Víme, že dvě zobrazení můžeme skládat. Analogicky se dá definovat obecněji součin dvou relací.

D. 1.3. Nechť $A, B \in P(V)$. *Součin AB těchto relací* je taková relace v M, že pro $x, y \in M$ platí $xABy$, právě když existuje takový prvek $z \in M$, že platí xAz a zBy.

Příklad. Nechť M je množina přirozených čísel. Definujme relaci

$$A = \{(n, 2n);\ n \in M\}$$

a relaci

$$B = \{(n, 3n);\ n \in M\}$$

což znamená

$$A = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots\}$$
$$B = \{(1,3), (2,6), (3,9), (4, 12), \ldots\}$$

Součinem AB těchto relací je relace

$$AB = \{(n, 6n);\ n \in M\}$$

neboli

$$AB = \{(1,6), (2,12), (3,18), (4,24), \ldots\}$$

Skutečně $xABy$, právě když $y = 6x$, což můžeme zapsat $y = 3 \cdot (2x)$. Tedy $z = 2x$, $y = 3z$, neboli xAz, zBy.

V. 1.4. Pro každé $R \in P(V)$ platí:

$$RE = ER = R$$
$$OR = RO = 0$$
$$0 \subset R \subset V$$

Důkaz. Nechť $xERy$. Pak podle D. 1.3 existuje $z \in M$ tak, že xEz, zRy. Podle D. 1.2 je $z = x$, a tedy xRy.

Nechť naopak xRy. Poněvadž současně je xEx, platí podle D. 1.3 $xERy$.

Podobně se dokáže rovnost $RE = R$.

Zbývající dvě tvrzení plynou přímo z definice.

Jistě nás bude zajímat otázka, jak je to s platností zákona komutativního a asociativního, případně distributivních zákonů pro násobení relací.

Zvolme např.

$$M = \{a, b, c, d\}$$
$$A = \{(a,b), (a,d), (b,c), (c,c)\}$$
$$B = \{(a,b), (a,c), (b,c), (d,d)\}$$

Pak

$$AB = \{(a,c), (a,d)\}$$
$$BA = \{(a,c), (b,c)\}$$

Vidíme, že $AB \neq BA$, komutativní zákon tedy neplatí.

Další odpovědi dávají V. 1.5 a V. 1.6.

V. 1.5. Nechť A, B, $C \in P(V)$. Pak platí $(AB)C = A(BC)$.

Důkaz. Nechť $x(AB)Cy$. Pak existuje $z_1 \in M$ tak, že $xABz_1$, z_1Cy. Poněvadž $xABz_1$, existuje $z_2 \in M$ tak, že xAz_2, z_2Bz_1. Nyní využijeme platnosti z_2Bz_1, z_1Cy. Odtud plyne z_2BCy. Je tedy xAz_2, z_2BCy a odtud $xA(BC)y$. Podobně se dokáže inkluze $A(BC) \subset (AB)C$.

V. 1.6. Nechť A, B, $C \in P(V)$. Pak platí:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC \qquad (1)$$
$$(B \cup C)A = BA \cup CA \qquad (2)$$
$$A(B \cap C) \subset AB \cap AC \qquad (3)$$
$$(B \cap C)A \subset BA \cap CA \qquad (4)$$

Důkaz. (1) Nechť $x[A(B \cup C)]y$. Pak existuje $z \in M$ tak, že xAz, $z(B \cup C)y$. Zápis $z(B \cup C)y$ znamená, že zBy nebo zCy. Tedy xAz, zBy nebo xAz, zCy, což znamená $xABy$ nebo $xACy$, neboli $x(AB \cup AC)y$. Podobne se dokazuje obrácená inkluze.

Uvedeme ještě důkaz (4). Nechť $x[(B \cap C)A]y$. Pak existuje $z \in M$ tak, že $x(B \cap C)z$, zAy; $x(B \cap C)z$ znamená, že xBz, xCz. Tedy xBz, zAy neboli $xBAy$ a současně xCz, zAy neboli $xCAy$. Platí tedy $x(BA \cap CA)y$.

Poznámka. Inkluze (3), (4) nelze obrátit.

Příklad

$$M = \{a, b, c, d\}$$
$$A = \{(a, b)\}$$

$$B = \{(a, c)\}$$
$$C = \{(b, d), (c, d)\}$$

$(A \cap B)C = 0$, poněvadž $A \cap B = 0$. Avšak $AC \cap BC = \{(a, d)\}$.

Poznámka. V. 1.6 lze zobecnit tak, že místo sjednocení (průniku) dvou množin uvažujeme sjednocení (průnik) systému libovolného počtu množin.

V. 1.7. Nechť A, B, $C \in P(V)$ a nechť $A \subset B$. Pak platí:

$$AC \subset BC \tag{5}$$

$$CA \subset CB \tag{6}$$

Důkaz. Poněvadž $A \subset B$, platí $A \cup B = B$. Tedy $(A \cup B)C = BC$. Podle V. 1.6 platí $(A \cup B)C = AC \cup BC$. Z předcházejícího plyne $AC \cup BC = BC$ a odtud $AC \subset BC$.

Analogicky se provede druhá část důkazu.

D. 1.8. Relace R^{-1} se nazývá *relace inversní k relaci R*, jestliže $xR^{-1}y$, právě když yRx.

V. 1.9. Nechť R, $S \in P(V)$. Pak platí:

$$(R^{-1})^{-1} = R \tag{7}$$

$$\text{Jestliže } R \subset S, \text{ pak } R^{-1} \subset S^{-1} \tag{8}$$

$$(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1} \tag{9}$$

Důkaz. (7) plyne bezprostředně z definice.

(8) dokážeme takto: Nechť $xR^{-1}y$. Pak yRx. Poněvadž podle předpokladu je $R \subset S$, platí též ySx a odtud $xS^{-1}y$. Je tedy $R^{-1} \subset S^{-1}$.

(9) Nechť $x(RS)^{-1}y$. Pak $yRSx$ neboli existuje $z \in M$ tak, že yRz, zSx, což se dá pomocí inversních relací přepsat $xS^{-1}z$, $zR^{-1}y$ neboli $xS^{-1}R^{-1}y$.

Obráceně: Nechť $xS^{-1}R^{-1}y$. Pak existuje $z \in M$ tak, že $xS^{-1}z$, $zR^{-1}y$ neboli yRz, zSx. Je tedy $yRSx$ neboli $x(RS)^{-1}y$.

V. 1.10. Nechť R, $S \in P(V)$. Pak platí:

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \tag{10}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \tag{11}$$

Důkaz. Nechť $x(R \cup S)^{-1}y$ neboli $y(R \cup S)x$. Odtud yRx nebo ySx

neboli $xR^{-1}y$ nebo $xS^{-1}y$, což se dá zapsat $x(R^{-1} \cup S^{-1})y$. Všechny uvedené implikace se dají obrátit.

Podobně se provede důkaz (11).

P o z n á m k a. V. 1.10 se dá zobecnit stejně jako V. 1.6.

D. 1.11. Binární relace R v množině M se nazývá

1. *reflexivní,* právě když $E \subset R$;
2. *symetrická,* právě když $R = R^{-1}$;
3. *tranzitivní,* právě když $R^2 \subset R$.

D.1.12. Binární relace R v množině M se nazývá *ekvivalence,* je-li reflexivní, symetrická a tranzitivní.

2. Relace tolerance

Jak už bylo dříve uvedeno, relaci tolerance zavedl do matematiky E. Zeeman. Vychází z pojmu nerozlišitelnosti dvou objektů. Poněvadž to je pojem patřící více do fyziologie než do matematiky, není divu, že se jeho článek o tolerančních prostorech objevil ve sborníku *Towards a Theoretical Biology* (Birmingham 1968), který shrnuje výsledky prvního symposia z teoretické biologie. V tomto sborníku biologové, fyzikové, matematici a chemici zkoumají řadu základních problémů současné teoretické biologie. V úvodu k jeho ruskému překladu (Na puti k teoretičeskoj biologii. Moskva 1970) se zdůrazňuje, že „libovolný materiál, který bude nyní položen do teoretického základu biologie, bude mít mnohostranný vliv na všechny její konkretní oddíly jak v oblasti teorie, tak i ve sféře praxe“. Jedním ze stavebních kamenů teoretické biologie může být právě relace tolerance, což je relace, která je reflexivní a symetrická. Souvislost tohoto abstraktního matematického pojmu s reálnym světem je naprosto bezprostřední. Pro ilustraci si představme tento pokus: V určité, dostatečně velké vzdálenosti jsou v přímce umístěny světelné zdroje v takových vzdálenostech od sebe, že každé dva sousední jsou nerozlišitelné. Vidíme tedy nepřerušovanou světelnou čáru. Zkoumejme relaci T v množině těchto světelných zdrojů, která je definovaná takto: xTy, právě když x, y jsou nerozlišitelné. Tato relace je zřejmě reflexivní a symetrická, není však tranzitivní. O tom se snadno přesvědčíme vypnutím několika světelných zdrojů umístěných za sebou.

Čára se přeruší. Tak např. uvažujeme body x, y, z, u, v, kde každé dva sousední jsou nerozlišitelné, avšak např. body x, v docela dobře rozlišíme. Tedy nerozlišitelnost tvoří reálný model relace tolerance. ZEEMAN prováděl podrobné úvahy o mozku, jejíchž cílem bylo ukázat, jak představa o tolerančních prostorech může být základem pro vytvoření obecné teorie myšlení a paměti.

Ukázali jsme si, že zavedení pojmu relace tolerance nemusí být samoúčelná záležitost a můžeme přejít k podrobnějšímu studiu vlastností této relace.

D. 2.1. *Tolerance* je relace, která je reflexivní a symetrická.

Poznámka. Tranzitivní tolerance je ekvivalence. Toleranci, která není tranzitivní, budeme nazývat *ryzí tolerance.*

D. 2.2. Množinu M se zadanou tolerancí T nazýváme *prostor tolerance* a značíme (M, T).

Uvedeme si několik příkladů ryzích tolerancí. Půjde vždy o nějakou „podobnost" mezi dvěma prvky. Každý prvek je „podobný" sám sobě a u dvou různých „podobných" prvků nezáleží na jejich pořadí.

1. M je množina žáků v jedné třídě; xTy znamená, že x, y mají aspoň jednu společnou zálibu.

2. M je množina českých slov o stejném počtu hlásek; xTy znamená, že x, y se liší nejvýš jednou hláskou.

3. M je množina přirozených čísel větších než 1; xTy znamená, že existuje aspoň jeden společný dělitel čísel x, y různý od 1.

4. M je množina reálných funkcí reálné proměnné definovaných na jistém intervalu; xTy znamená, že grafy funkcí x, y se protínají aspoň v jednom bodě.

5. M je množina přímek v rovině; xTy znamená, že přímky x, y mají aspoň jeden společný bod.

6. M je množina algebraických rovnic o jedné neznámé; xTy znamená, že x, y mají aspoň jeden společný kořen.

7. M je množina neprázdných podmnožin jisté množiny; xTy znamená, že $x \cap y \neq \emptyset$.

8. M je množina reálných čísel; xTy znamená, že se čísla x, y liší nejvýš o dané $\varepsilon > 0$.

9. M je množina bodů v rovině, $d > 0$ libovolné reálné číslo; xTy znamená, že vzdálenost bodů x, y je menší než d.

10. M je množina bodů v rovině opatřené souřadným systémem; xTy znamená, že body x, y leží na rovnoběžce s kteroukoliv souřadnou osou.

11. M je množina lineárních rovnic o jedné neznámé; xTy znamená, že kořeny rovnic x, y se liší nejvýš o dané kladné ε.

12. M je množina variací třetí třídy z prvků 0, 1 s opakováním, tj.

$$M=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\\(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

Dvě variace (a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3) jsou v toleranci, jestliže existuje aspoň jeden index i $(1 \leqq i \leqq 3)$ tak, že platí $a_i = a'_i$.

13. M je množina uspořádaných n-tic reálných čísel. Pro $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y=(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ platí xTy, jestliže existuje aspoň jeden index i $(1 \leqq i \leqq n)$, pro nějž $a_i = a'_i$.

14. Nechť (M, T) je prostor tolerance. Označíme množinu všech podmnožin množiny M jako 2^M. V množině 2^M zavedeme toleranci τ takto: Pro $A, B \in 2^M$ platí $A\tau B$, jestliže libovolný prvek množiny A je tolerantní ve smyslu T-tolerance s některým prvkem množiny B a naopak libovolný prvek množiny B je tolerantní s některým prvkem množiny A.

Z uvedených příkladů je zřejmé, že dva prvky jsou v toleranci, mají-li aspoň jeden společný znak, tj. jsou částečně vzájemně zaměnitelné. Provedeme jisté zobecnění. Uvažujme kromě základní množiny M množinu N všech možných znaků. Lze předpokládat, že každému prvku množiny M můžeme přiřadit aspoň jeden prvek množiny N. Označme $P(N)$ množinu, jejímiž prvky jsou všechny neprázdné podmnožiny množiny N a uvažujme zobrazení $f: M \to P(N)$, které každému prvku množiny M přiřazuje tu podmnožinu množiny N, jejímiž prvky jsou všechny ty znaky, kterými se daný prvek množiny M vyznačuje. Pro každé $x \in M$ platí $f(x) \neq \emptyset$. Definujme relaci T tímto způsobem: $xT_f y$, právě když $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$. Takto definovaná relace T je tolerance. Toleranci T můžeme charakterizovat ještě jiným způsobem. Označme $M(\xi)$ množinu všech takových prvků množiny M, které mají znak ξ. Poněvadž každému $x \in M$ přísluší aspoň jeden znak $\xi \in N$, platí $\bigcup_{\xi \in N} M(\xi) = M$. Jestliže se definuje *pokrytí množiny M* jako množinový systém π s vlastností $M \subset \bigcup_{A \in \pi} A$ a $A \in \pi$ se nazve *třídou tohoto pokrytí*, pak můžeme říci, že

Důkaz. 1. $A \circ B$ je reflexivní podle V. 2.3.

2. $(A \circ B)^{-1} = (AB \cup BA)^{-1} = (AB)^{-1} \cup (BA)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \cup A^{-1}B^{-1} =$

$= BA \cup AB = AB \cup BA = A \circ B$ (podle V. 1.10, V. 1.9 a předpokladu).

Všimněme si nyní podrobněji tolerančních prostorů. Uvažujme libovolný prostor tolerance (M, T).

D. 2.8. Množina $L \subset M$ se nazýva *podtřída tolerance* v (M, T), jestliže pro každé $x, y \in L$ platí xTy.

V. 2.9. K tomu, aby pro $x, y \in M$ platilo xTy, je nutné a stačí, aby existovala podtřída L taková, že $x \in L$, $y \in L$.

Důkaz. 1. Jestliže $x \in L$, $y \in L$, pak xTy podle D. 2.8.

2. Jestliže xTy, pak $\{x, y\}$ tvoří podtřídu, poněvadž kromě xTy platí: xTx, yTy, yTx.

D. 2.10. Množina $K \subset M$ se nazývá *třída tolerance* v (M, T), jestliže

1. K je podtřída tolerance v (M, T);

2. je-li $z \in M$, $z \notin K$, pak existuje aspoň jeden prvek $x \in K$, pro nějž neplatí xTz.

V. 2.11. Každá podtřída L je obsažena aspoň v jedné třídě K.

Důkaz provedeme pro konečnou množinu. V případě nekonečné množiny by bylo třeba užít transfinitní indukce. Příslušný důkaz může čtenář najít v [2].

Nechť L je podtřída. Jestliže L je současně třída, není co dokazovat. Nechť L není třída, tzn. v množině $M - L$ existuje prvek z, který je tolerantní ke všem prvkům množiny L. Uvažujeme dále množinu $L =$ $= L \cup \{z\}$, která je opět podtřídou, a úvaha, kterou jsme provedli pro podtřídu L, opakujeme pro podtřídu L_1. Tak postupně přidáváme další prvky a poněvadž M je konečná množina, dojdeme po konečném počtu kroků ke třídě K.

Důsledkem V. 2.9 a V. 2.11 je nasledující věta:

V. 2.12. K tomu, aby pro $x, y \in M$ platilo xTy, je nutné a stačí, aby existovala třída K taková, že $x \in K$, $y \in K$.

Poznámka. Poněvadž pro každý prvek $x \in M$ je množina $\{x\}$ podtřídou k níž existuje podle V. 2.11 jistá třída K, je $x \in K$ a systém tříd tolerance tedy tvoří pokrytí množiny M.

Uvažujme nyní množinu H, jejímiž prvky jsou všechny třídy tolerance v (M, T) a dále množinu $P(H)$, jejímiž prvky jsou všechny neprázdné podmnožiny množiny H. V $P(H)$ definujme toleranci T_K tímto způsobem: Pro A_1, $A_2 \in P(H)$ platí $A_1 T_K A_2$, právě když $A_1 \cap A_2^K \neq \emptyset$, tj. existuje-li aspoň jedna třída K v (M, T) taková, že $K \in A_1 \cap A_2$.

V. 2.13. Nechť (M, T) je libovolný prostor tolerance a H množina všech jeho tříd. Pak existuje zobrazení φ: $M \to P(H)$ takové, že pro x, $y \in M$ platí xTy, právě když pro jejich obrazy $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ platí $\varphi(x) T_K \varphi(y)$.

Důkaz. φ zavedeme jako zobrazení, které každému prvku $x \in M$ přiřazuje takovou podmnožinu množiny H, která obsahuje všechny třídy tolerance, do kterých patří prvek x. Tento prvek množiny $P(H)$ označme $\varphi(x)$. Poněvadž každý prvek množiny M je obsažen aspoň v jedné třídě tolerance, je $\varphi(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in M$. Pro dva prvky x, $y \in M$ platí xTy, právě když existuje třída tolerance K, pro niž platí $x \in K$, $y \in K$, tzn. právě když $\varphi(x) \cap \varphi(y) \neq \emptyset$ neboli $\varphi(x) T_K \varphi(y)$.

V. 2.14. Tolerance T v množině M je ekvivalencí, právě když každé dvě různé třídy tolerance jsou disjunktní.

Důkaz. Nechť každé dvě různé třídy tolerance jsou disjunktní. Nechť xTy, yTz, tzn. existují třídy K_1, K_2 takové, že x, $y \in K_1$; y, $z \in K_2$. Platí tedy $y \in K_1 \cap K_2$ a podle předpokladu $K_1 = K_2$. Odtud x, $z \in K_1$, tj. xTz.

2. Nechť tolerance T je tranzitivní. Sporem dokážeme, že pak libovolné dvě různé třídy tolerance K_1, K_2 jsou disjunktní. Předpokládejme tedy $K_1 \neq K_2$, $K_1 \cap K_2 = P \neq \emptyset$. Pak existuje $y \in P$. Zvolme $z \in K_2 - K_1$ libovolně a $x \in K_1 - K_2$ jako takový prvek, pro nějž neplatí xTz (podle D. 2.10). Platí xTy, YTz (totiž x, $y \in K_1$; y, $z \in K_2$), ale neplatí xTz, což je spor s předpokladem tranzitivity tolerance T.

Literatura

[1] Šrejder, J. A.: Ravenstvo, schodstvo, porjadok. Moskva 1971.

[2] Šrejder, J. A.: Prostranstva tolerantnosti. Kibernetika, 2, 1970.

[3] Jakubovič, S. M.: Aksiomatičeskaja teorija schodstva. Naučno-techničeskaja informacija, 10, 1968.

[4] Zeeman, E. C.: Tolerantnyje prostranstva i mozog. Na puti k teoretičeskoj biologii, Moskva 1970 (překlad z angličtiny).

[5] Kosmák, L.: Binární relace v množině (texty semináře „O nových směrech ve vyučování matematice" na UJEP v Brně, 1972).

[6] Šedivý, J.: O modernizácii školskej matematiky. Bratislava 1972.