

VEKTORY OČAMI STREDOŠKOLSKÉHO PROFESORA

MILOŠ FRANEK, Prievidza

Na strednej škole sa vektory preberajú viac z geometrického hľadiska, čím vlastne tento príspevok nadväzuje na príspevok [2]. Dá sa povedať, že príspevok [2] tu rozoberáme podrobnejšie, pričom súčasne preberáme dvojrozmernový aj trojrozmerný priestor s podčiarknutím analógií medzi nimi. Prihlada sa na súčasný stav v gymnáziach — na zbierku [3] a komentár [4], ale zhoda v chápání niektorých pojmov nie je doslovná. Text je napísaný tak, aby sa dal preberať na strednej škole, pričom sa, pravda, nezaobíde bez úpravy vyučujúceho (napr. prípravné úvahy a niektoré poznámky len hovorí; príklady riešiť podrobnejšie; v humanitnej vetve vyniechať niektoré „zrejmé“ definície, prípadne dôkazy). Ani zhoda so súčasnými osnovami pre gymnázia (šk. r. 1976/77) nie je doslovná, ide však len o zmenu poradia: najprv prebrať vektory a až potom ich použitie v analytickej geometrii. V druhom ročníku v prírodovednej vetve sa to dá urobiť napr. tak, že sa z goniometrických funkcií preberú len definície a grafy, čím sa získa čas na dobranie analytickej geometrie lineárnych útvarov už v druhom ročníku. Všetky vlastnosti goniometrických funkcií sa potom preberú v treťom ročníku. Výhoda je v tom, že možno v triede používať zbierku [3] aj na metrické vlastnosti, čo bez spomenutého presunu nebolo možné (zbierku dostávajú len žiaci druhého ročníka a vyučuje sa to na začiatku tretieho).

Po prebrati každého menšieho celku sú uvedené nadväzujúce úlohy z [3], označené spôsobom „strana/cíl úlohy“, pričom index R označuje riešené príklady

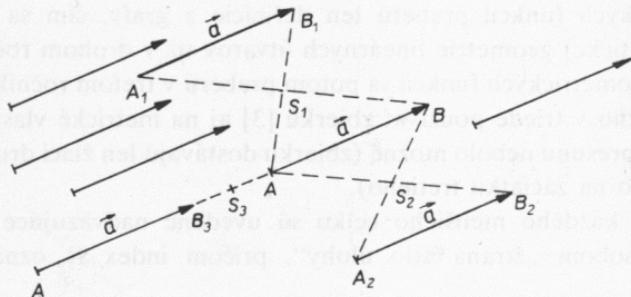
Pojem vektora

Na vyjadrenie veľkosti používame v geometrii napr. úsečky, na určenie smeru sú vhodné priamky a pre orientovaný smer polpriamky. Aby sme mohli súčasne vyjadriť veľkosť aj (orientovaný) smer — ako to často potrebujeme nielen v matematike, ale aj vo fyzike — zavádzame osobitné útvary, nazývané vektormi. Vektor možno udať usporiadanou dvojicou bodov $[A, B]$; jeho veľkosť bude

vzdialenosť $|\vec{AB}|$ (takýto zápis vzdialnosti budeme používať aj ďalej), jeho orientovaný smer bude daný napr. polpriamkou \vec{AB} (o smere a orientácii budeme hovoriť len pre $A \neq B$). Treba teraz povedať, kedy usporiadane dvojice $[A, B]$, $[A_1, B_1]$ určujú ten istý vektor. To možno urobiť napr. tak, že vyžadujeme rovnosť vzdialenosťí $|\vec{AB}| = |\vec{A_1B_1}|$ a pre $A \neq B$, $A_1 \neq B_1$ aj rovnaký smer (t. j.

$\vec{AB} \parallel \vec{A_1B_1}$) i. „súhlasnú orientovanosť“ daných dvojíc (graficky vyjadrenú šípkami — pozri obr. 1). Na intuitívnu predstavu to úplne stačí, no pri presnej definícii by sa musel definovať pojem orientácie. Použijeme však inú cestu: o dvojiciach bodov $[A, B]$, $[A_1, B_1]$ poviem, že sú ekvivalentné a napišeme $[A, B] \sim [A_1, B_1]$, ak dvojice $[A, B_1]$, $[B, A_1]$ majú spoločný stred (stredom dvojice $[M, N]$ rozumieme stred úsečky MN , ak $M \neq N$, resp. bod M , ak $M = N$).

Zvolenú priamku, rovinu alebo priestor (hociktoré chápame ako základná množina bodov) budeme (v tomto poradí) nazývať aj jednorozmerný, dvojrozmený alebo trojrozmený euklidovský priestor a označovať E_1 , E_2 , E_3 . Spoločné označenie bude E_n (kde $n = 1, 2, 3$) — použije sa pri úvahách, ktoré sú analogické pre E_1 , E_2 aj E_3 .



Obr. 1

Definícia vektora. Nech $A, B \in E_n$. Vektorom \vec{AB} (stručne: vektorom) nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc bodov z E_n , ktoré sú ekvivalentné s dvojicou $[A, B]$. Každú z nich nazývame umiestením vektora \vec{AB} . Pre $n = 1$ hovoríme o jednorozmerných vektoroch (vektorech na priamke), pre $n = 2$ a $n = 3$ o dvojrozmených a trojrozmených vektoroch (o vektoroch v rovine a v priestore).

Poznámky

a) Na označenie vektorov budeme používať polotučný typ písma kurz., napr. α (čítaj: „ α -vektor“). Grafickým znázornením vektora α je hociktorá šípka spájajúca počiatočný a koncový bod (t. j. obraz prvej a druhej zložky) hociktorého jeho umiestenia (pozri obr. 1).

b) Z obr. 1 (zachytávajúceho prípad, keď A, B, A_1, B_1 neležia na priamke) vidíme, že ak $[A, B] \sim [A_1, B_1]$, tak $|AB| = |A_1B_1|$, $AB \parallel A_1B_1$ (alebo $\Delta ABS_1 \cong \Delta B_1A_1S_1$) a súhlasná orientácia je tiež „zrejmá“. Vektor sme teda zaviedli v „naplánovanom“ zmysle.

c) Z definície aj obrázka vidno aj to, že vektor je posunutie, čiže druh zobrazenia priamky (roviny, priestoru) do seba. Podrobnejšie: Ak $\alpha = \overrightarrow{AB}$, tak α je posunutie, ktoré zobrazuje bod A do bodu B (teda $\alpha: A \mapsto B$ alebo $\alpha(A) = B$) a hociktorý bod A_1 do bodu B_1 súmerného s bodom A podľa stredu S_1 dvojice $[B, A_1]$.

d) Lubovoľný vektor je množina všetkých svojich umiestnení (bodových dvojíc ekvipotentných s niektorou vybranou dvojicou). Dvojica $[A, B]$ je umiestnením vektora α práve vtedy, keď $\alpha = \overrightarrow{AB}$. Formálne:

$$[A, B] \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \alpha$$

V podstate to isté vyjadruje ekvivalencia

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow [A, B] \sim [C, D]$$

e) Z bodu c) (o konštrukcii bodu B_1) vyplýva, že počiatočný bod umiestenia vektora môže byť hociktorý bod základnej množiny, t. j. ku každému vektoru α a k lubovoľnému bodu M existuje taký bod N , že $\alpha = \overrightarrow{MN}$.

Príklad 1. Nech rovina E_2 je základná množina; $ABCDEF$ je pravidelný šestuholník so stredom S , ďalej $M = \{A, B, C, D, E, F, S\}$ a vektor α nech zobrazuje bod S do bodu C .

a) Nájdite všetky umiestenia vektora α , ktorých počiatočný i koncový bod patria do množiny M .

b) Zapíšte všetky rovnosti tvaru $v(P) = Q$, kde $v \in \{\alpha, EF\}$; $P, Q \in M$.

c) Vymenovaním prvkov určte množinu všetkých vektorov tvaru \vec{PQ} , kde $P, Q \in M$. Koľko má táto množina prvkov?

d) Ktoré z nasledujúcich vzťahov sú pravdivé: $\vec{AS} \subset \vec{FE}$, $\vec{AS} \in \vec{AD}$, $\vec{AS} \subset \vec{AD}$,

$[A, B] \in \vec{AB}$, $[A, B] \in ED$, $\{[A, B], [S, C]\} \subset \vec{FS}$, $[E, D] \subset \vec{ED}$?

(Výsledky: a) $[A, B], [F, S], [S, C], [E, D]$; b) $\sigma(A) = B$, $\sigma(F) = S$, $\sigma(S) = C$, $\sigma(E) = D$, $\vec{EF}(E) = F$, $\vec{EF}(D) = S$, $\vec{EF}(S) = A$, $\vec{EF}(C) = B$; c) $\{\vec{AA}, \vec{AB}, \dots, \vec{FA}, \vec{AC}, \dots, \vec{FB}, \vec{AD}, \dots, \vec{FC}\}$, 19 prvkov; d) prvý, štvrtý, piaty a šiesty.)

Príklad 2. Riešte podobné úlohy s trojrozmernými vektormi na danom kvádri.

Príklad 3. V akom (množinovom) vzťahu sú jednorozmerný, dvojrozmerný a trojrozmerný vektor \vec{AB} .

(Odpoveď: prvý je podmnožinou druhého a ten tretieho.)

Príklad 4. Nech čísla a, b, a_1, b_1 označujú body na čiselnnej osi. Ako možno číselnne charakterizovať ekvipotentné dvojice $[a, b], [a_1, b_1]$?

(Odpoveď: rovnosťou $a + b_1 = b + a_1$ alebo $b - a = b_1 - a_1$ a pod.)

Príklad 5. Ak $\vec{AB} = \vec{CD}$, tak $\vec{CA} = \vec{DB}$. Dokážte.

Riešenie. Keď $\vec{AB} = \vec{CD}$, tak $[A, B] \sim [C, D]$, dvojice $[A, D], [B, C]$ majú spoločný stred, dvojice $[C, B], [A, D]$ tiež (taký istý) čiže $[C, A] \sim [D, B]$, $\vec{CA} = \vec{DB}$.

[3]: 150/1_R, 151/1, 2, 152/2_R, 3, 4, 5, 154/6 – 8.

Základné operácie s vektormi

S číslami môžeme vykonávať počtové výkony — operácie. Určitou obdobou niektorých z nich sú operácie s vektormi. Napríklad, so sčítaním čísel má mnoho spoločných vlastností sčítanie (skladanie) vektorov. Pritom obdobou nuly je tzv. nulový vektor, obdobou opačného čísla (k danému) je opačný vektor (v [2] nazývaný inverzným) a pod.

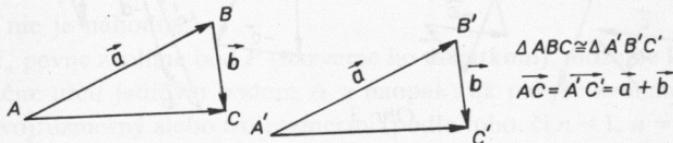
Definícia operácií s vektormi. Nech E_n je základná množina, $A, B, C \in E_n$. Nulovým vektorom **0** nazývame vektor \vec{AA} a opačným vektorom k vektoru

$\alpha = \vec{AB}$ nazývame vektor \vec{BA} (označenie $-\alpha$ alebo $-\vec{AB}$). Súčtom vektorov

$\alpha = \vec{AB}$, $\beta = \vec{BC}$ rozumieme vektor \vec{AC} (označenie $\alpha + \beta$) a rozdiel vektorov α , β definujeme rovnosťou $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Poznámky

a) Dá sa dokázať, že význam symbolov 0 , $-\alpha$, $\alpha + \beta$ bol zavedený korektnie, t.j. nemení sa v závislosti od toho, ako definíciu použijeme. Konkrétnejšie: pri definícii nulového vektora to znamená, že pre ľubovoľné body A , B platí: $\vec{AA} = \vec{BB}$. Pri súčte pre $\alpha = \vec{AB} = \vec{A'B'}$, $\beta = \vec{BC} = \vec{B'C'}$ platí: $\vec{AC} = \vec{A'C'}$ (pozri obr. 2). Podobne pri opačnom vektore.



Obr. 2

b) Z definície vyplývajú tieto formálne pravidlá:

$$0 = \vec{AA} = \vec{BB} = \dots,$$

$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Najmä posledné pravidlo si treba dobre uvedomiť: keď chceme dva vektory sčítať, umiestime ich tak, aby bol koncový bod umiestenia prvého člena totožný s počiatočným bodom umiestenia druhého (pozri obr. 2). To sa vždy dá (pozri poznámku e) za definíciou vektora).

Pri troch členoch dostaneme:

$$(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

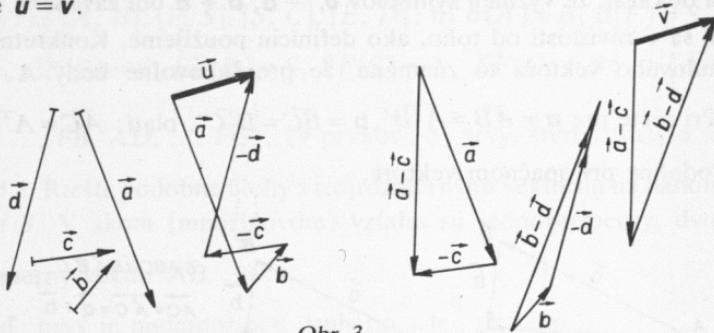
takže zátvorky sú zbytočné; podobne pri viacerých členoch.

Napríklad:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$

Príklad 6. Udajte si vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ v rovine, podľa definície zostrojte vektory $\mathbf{u} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{c} - \mathbf{d}$, $\mathbf{v} = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + (\mathbf{b} - \mathbf{d})$ a porovnajte ich.

Riešenie je na obr. 3 — vysvetlíme postup napájania (a prípadne ukážeme, o čo je prehľadnejší ako spôsob pomocou rovnobežníkov známy z fyziky). Upozorníme na to, že $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.



Obr. 3

Príklad 7. Riešte podobnú úlohu s vektormi $\mathbf{u} = (\mathbf{a} - \mathbf{d}) - (\mathbf{s} + \mathbf{b})$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + (-\mathbf{c} - (\mathbf{b} + \mathbf{d}))$.

Po vyriešení príkladu opäť zistíme, že $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, čo vzbudzuje podozrenie, že pri sčítovaní a odčítovaní vektorov platia obdobné pravidlá ako pri číslach. Skutočne to tak je; uvedme a dokážme aspoň niektoré:

Pre ľubovoľné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s}$ v E_n a pre nulový vektor platí:

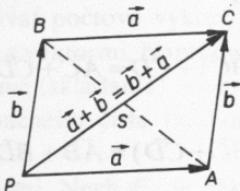
$$(1) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{(komutatívnosť súčtu)}$$

$$(2) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \text{(asociatívnosť súčtu)}$$

$$(3) \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \quad (\mathbf{0} \text{ je neutrálny prvok sčitovania})$$

$$(4) \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (-\mathbf{a} \text{ je inverzný prvok k } \mathbf{a})$$

Dôkazy: Nech $\mathbf{a} = \vec{PA}$, $\mathbf{b} = \vec{PB}$ a C je bod súmerný s bodom P podľa stredu S dvojice $[A, B]$ (obr. 4). Potom dvojice $[P, C]$, $[A, B]$ majú spoločný stred, čiže



Obr. 4

$[P, A] \sim [B, C]$, $\mathbf{a} = \vec{PA} = \vec{BC}$. Podobne $\mathbf{b} = \vec{PB} = \vec{AC}$, odkiaľ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \vec{PA} + \vec{AC} = \vec{PC} = \vec{PB} + \vec{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

- (2) sme vlastne dokázali v poznámke b) za definíciou; stačí položiť $\mathbf{a} = \vec{AB}$,
 $\mathbf{b} = \vec{BC}$, $\mathbf{c} = \vec{CD}$.

(3) Pre $\mathbf{a} = \vec{PA}$ platí $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \vec{PA} + \vec{AA} = \vec{PA} = \mathbf{a}$

(4) Pre $\mathbf{a} = \vec{PA}$ platí $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \vec{PA} + \vec{AP} = \vec{PP} = \mathbf{0}$

Zo základných pravidiel (1) až (4) sa dajú odvodiť ďalšie — platia napr. znamienkové pravidlá pre odstraňovanie zátvoriek, takže rovnosť $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ z príkladov 6, 7 nie je náhodná.

Ak v E_n pevne zvolíme bod P (nazveme ho začiatkom), môžeme každý vektor \mathbf{a} jednoznačne určiť jediným bodom A a naopak; ak navyše zvolíme aj jednorozmerný, dvojrozmerný alebo trojrozmerný (podľa toho, či $n = 1$, $n = 2$ alebo $n = 3$) súradnicový systém (ktorý môže byť aj kosouhlý a jednotky dĺžky na osiach nemusia byť rovnaké) so začiatkom P , môžeme \mathbf{a} vyjadriť číslami — súradnicami bodu A . Spresníme to:

Definícia polohového vektora a súradníckeho vektora. Nech E_n je základná množina a $P \in E_n$. Polohovým vektorom bodu $A \in E_n$ (vzhľadom na začiatok P) nazývame vektor \vec{PA} ; označíme ho \mathbf{A} . Ak sa navyše zvolí súradnicový systém v E_n so začiatkom P , tak súradnicami vektora nazývame súradnice bodu, ktorého je polohovým vektorom.

(Polohovým vektorom sa často rozumie len umiestenie, kde počiatočný bod je začiatok, nie vektor ako celok. Chápanie z definície je však asi z hľadiska výpočtov praktickejšie.) Na rozlišenie budeme súradnice bodov písat do hranatých a súradnice vektorov do okrúhlych zátvoriek. V E_2 teda napr. platí: ak $\mathbf{a} = \mathbf{A} (= \vec{PA})$, $A = [a_1, a_2]$, tak $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (čítaj: \mathbf{a} -vektor rovná sa a_1, a_2 alebo \mathbf{a} má súradnice a_1, a_2).

Príklad 8. Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stredom S , ktorý považujeme za začiatok.

a) Čo je \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{S} ?

b) Polohové vektory ktorých bodov sú vektori \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} v tomto poradí?

(Odpoveď: a) \vec{SA} , \vec{SB} , $\mathbf{0}$; b) bodov C, D, E .)

Príklad 9. V E_2 je daný pravouhlý súradnicový systém a obdĺžnik $ABCD$ so stranou AB na osi o_x , stranou AD na osi o_y a vrcholom $C=[a, b]$. Pomocou súradníck určte \vec{AC} , \vec{CD} a vektor \mathbf{u} , kde $\mathbf{u}(D)=B$.

(Výsledky: $\vec{AC}=(a, b)$, $\vec{CD}=(-a, 0)$, $\mathbf{u}=(a, -b)$.)

Príklad 10. V E_3 je daný trojrozmerný pravouhlý súradnicový systém a kváder $ABCDEFGH$ ($ABCD$ je stena, $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$) s hranami DC, DA, DH na súradnicových osiach o_x, o_y, o_z v tomto poradí s vrcholom $F=[a, b, c]$. Súradnicami určte vektory $\vec{CF}, \vec{EB}, \vec{FD}$.

(Odpoveď: $\vec{CF}=(0, b, c)$, $EB=(a, 0, -c)$, $\vec{FD}=(-a, -b, -c)$.)

[3]: 172/37a-c.

Zavedieme ďalšiu operáciu, a to násobenie reálneho čísla a vektora.

Definícia. Nech k je reálne číslo a $\mathbf{a}=\vec{AB}$. Pre $k=0$ alebo $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ kladieme $k\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Pre $k \neq 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ položíme $k\mathbf{a}=\vec{AC}$, kde $|AC|=|k| \cdot |AB|$ a bod C leží na polpriamke AB , ak $k > 0$, resp. na opačnej polpriamke, ak $k < 0$.

Príklad 11. Zvoľte si (konkrétnie) čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a v dvojrozmernom súradnicovom systéme znázornite vektory $\mathbf{a}=(a_1, a_2), \mathbf{b}=(b_1, b_2)$, podľa definície zostrojte vektor $\mathbf{u}=2\mathbf{a}-\frac{3}{4}\mathbf{b}$ a odmerajte jeho súradnice u_1, u_2 . Výpočtom sa presvedčte, že $u_1=2a_1-\frac{3}{4}b_1$, $u_2=2a_2-\frac{3}{4}b_2$. Výsledok signalizuje (dokážeme to dodatočne), že pre libovoľné vektory $\mathbf{a}=(a_1, a_2), \mathbf{b}=(b_1, b_2)$ a každé reálne číslo k platí:

- (A) $(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$;
- (B) $-(a_1, a_2)=(-a_1, -a_2)$;
- (C) $(a_1, a_2)-(b_1, b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2)$;
- (D) $k(a_1, a_2)=(ka_1, ka_2)$

(Porovnajte s príkladmi 3, 4 v [1].) Teda: operácie s vektormi možno algebricky uskutočňovať tak, že vykonávame príslušné operácie s ich súradnicami.

Dôkaz: Nech $\mathbf{a}=(a_1, a_2), \mathbf{b}=(b_1, b_2), \mathbf{a}+\mathbf{b}=(c_1, c_2)$. Priemet stredu dvojice bodov $[A, B]$ je stredom dvojice ich priemetov (obr. 5a), takže $\frac{0+c_1}{2}=s_1=\frac{a_1+b_1}{2}$, čiže $c_1=a_1+b_1$ a podobne $c_2=a_2+b_2$. Preto $(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=\mathbf{a}+\mathbf{b}=(c_1, c_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$, čo dáva (A).

Z definície súčinu čísla a vektora a z rovnočahlosti so stredom P a koeficientom

k (obr. 5b) vyplýva, že pre $(a_1, a_2) = \mathbf{a} = \vec{PA}$, $(b_1, b_2) = \mathbf{b} = \vec{PB}$ (kde B je obraz bodu A v našej rovnočahlosti) platí $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$. Preto $k(a_1, a_2) = ka = (b_1, b_2) = (ka_1, ka_2)$, z čoho dostávame (D).

Z definície je zrejmé, že $-\mathbf{a} = -1\mathbf{a}$, takže $-(a_1, a_2) = -\mathbf{a} = -1\mathbf{a} = -1(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$ podľa (D), čím sme dokázali aj (B). Napokon (C) vyplýva z predošlého takto:

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1, a_2) + (-b_1, b_2) = (a_1, a_2) + \\ + (-b_1, b_2) = (a_1, -b_1, a_2 - b_2),$$

čím je dôkaz ukončený.

Pre násobenie čísel a vektorov platia podobné pravidlá ako pre násobenie čísel. Uvedme základné z nich:

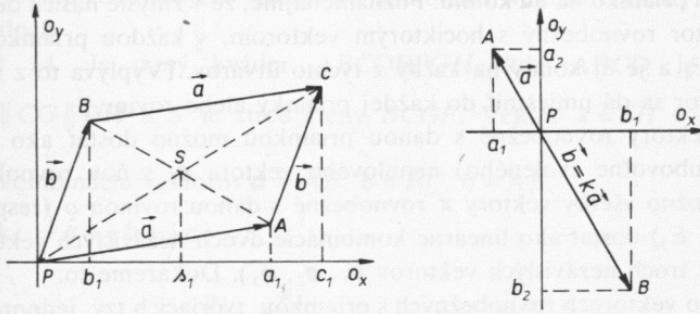
Pre libovoľné vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} a pre libovoľné čísla r, s platí:

$$(5) \quad r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b};$$

$$(6) \quad (r+s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a};$$

$$(7) \quad r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a};$$

$$(8) \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$



Obr. 5

Dôkazy vlastností (5) až (8) možno pohodlne urobiť pomocou súradníc (pozri ďalej). Okrem vzťahov (1) až (8) platia pre zavedené operácie aj ďalšie pravidlá analogické s počtovými pravidlami pre čísla — všetky sa však dajú odvodiť z (1) až (8). Preto sa tieto rovnosti (s doplnenými kvantifikátormi) berú za základ tzv. axiomatickej definície vektorového priestoru (bližšie pozri [1]), kde sa vektor chápe v omnoho širšom slova zmysle.

Príklad 12. Dokážte vzťah (5) pre dvojrozmerné vektorov.

Riešenie: Nech $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Potom $r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = r(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (r(a_1 + b_1), r(a_2 + b_2)) = (ra_1 + rb_1, ra_2 + rb_2) = (ra_1, ra_2) + (rb_1, rb_2) = r(a_1, a_2) + r(b_1, b_2) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$. (V prvej rovnosti sme použili

dosadenie, v druhej (A), v tretej (D), v štvrtej distributívnosť pre čísla, v piatej (A), v šiestej (D) a v siedmej dosadenie.)

Príklad 13. Dokážte (6) až (8) pre trojrozmerné vektory. (Pri riešení by sa malo dať žiakom určovať, čo sa na ktorom mieste použilo.)

Lineárne kombinácie

Nech r, s sú reálne čísla, \mathbf{a}, \mathbf{b} vektory v E_n . Vektor $r\mathbf{a}$ nazývame násobkom vektora \mathbf{a} (alebo jeho lineárnej kombináciou) a vektor $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ lineárnej kombináciou vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} (podobne pri viacerých vektoroch). Vektory (konečný počet) nazývame (lineárne) závislými, ak je niektorý z nich lineárnej kombináciou ostatných. V opačnom prípade ich nazývame (lineárne) nezávislými. O vektore \mathbf{a} povieme že sa dá umiestniť do útvaru U (na útvar U), ak existuje také umiestenie $[A, B]$ vektora \mathbf{a} , že $A, B \in U$. Vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} nazveme rovnobežnými (kolmými), ak sa dajú umiestniť na rovnobežné (kolmé) priamky. Vektor nazveme rovnobežným s priamkou alebo rovinou, ak sa dá do nej umiestniť, a kolmým na ňu, ak sa dá umiestniť na priamku na ňu kolmú. Poznamenajme, že v zmysle našich definícií je nulový vektor rovnobežný s hociktorým vektorom, s každou priamkou alebo rovinou v E_n a je aj kolmý na každý z týchto útvarov. (Vyplýva to z faktu, že nulový vektor sa dá umiestniť do každej priamky alebo roviny.)

Všetky vektory rovnobežné s danou priamkou možno dostať ako násobky jediného (ľubovoľne zvoleného) nenulového vektora \mathbf{e}_1 , s ňou rovnobežného. Podobne možno všetky vektory \mathbf{x} rovnobežné s danou rovinou ϱ (resp. všetky vektory \mathbf{x} v E_3) dostať ako lineárne kombinácie dvoch nezávislých vektorov $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \parallel \varrho$ (resp. troch nezávislých vektorov $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Dokážeme to.

Tvrdenie o vektoroch rovnobežných s priamkou, tvoriacich tzv. jednorozmerný vektorový priestor, je zrejmé z obr. 6 (napr. na obr. 6a sú \mathbf{e}_1 aj ľubovoľný vektor $\mathbf{x} \parallel p$ umiestené na p so spoločným počiatočným bodom, odkiaľ vidno, že \mathbf{x} je násobkom vektora \mathbf{e}_1).

Vektor $\mathbf{x} \parallel \varrho$ umiestníme podľa obr. 6b, t. j. $\mathbf{x} = \bar{P}\bar{X}$. Bodom X vedieme rovnobežku s priamkou p_2 , na ktorú sme umiestnili \mathbf{e}_2 , a jej priesecník s priamkou p_1 , kde je umiestnený \mathbf{e}_1 , označíme P_1 . Potom $\bar{P}\bar{P}_1$ je násobok vektora \mathbf{e}_1 , napr.

$\bar{P}\bar{P}_1 = x_1 \mathbf{e}_1$. Podobne $\bar{P}_1 X = x_2 \mathbf{e}_2$, odkiaľ $\mathbf{x} = \bar{P}\bar{X} = \bar{P}\bar{P}_1 + \bar{P}_1 X = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$. Tým je dokázané tvrdenie o vektoroch rovnobežných s tou istou rovinou, tvoriacich tzv. dvojrozmerný vektorový priestor. Napokon v trojrozmernom vektorovom priesto-

re, ktorý tvoria všetky vektorové vektory v E_3 , umiestime ľubovoľný vektor \mathbf{x} podľa obr. 6c:

$\mathbf{x} = \vec{P}\vec{X}$ a vektorové vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ na priamky p_1, p_2, p_3 prechádzajúce začiatkom P .

Bodom X viedieme priamku $p'_3 \parallel p_3$ a určíme jej priesečník P_{12} s rovinou ϱ_{12} , v ktorej ležia priamky p_1, p_2 . Potom určíme $P_1 \in p_1$ tak, aby $\vec{P}_1\vec{P}_{12} \parallel p_2$. Platí $\vec{P}\vec{P}_1 \parallel \mathbf{e}_1$, $\vec{P}_1\vec{P}_{12} \parallel \mathbf{e}_2$, $\vec{P}_{12}\vec{X} \parallel \mathbf{e}_3$, a preto existujú také čísla x_1, x_2, x_3 , že

$$\vec{P}\vec{P}_1 = x_1 \mathbf{e}_1, \quad \vec{P}_1\vec{P}_{12} = x_2 \mathbf{e}_2, \quad \vec{P}_{12}\vec{X} = x_3 \mathbf{e}_3, \quad \text{čiže} \quad \mathbf{x} = \vec{P}\vec{X} = \vec{P}\vec{P}_1 + \vec{P}_1\vec{P}_{12} + \vec{P}_{12}\vec{X} =$$

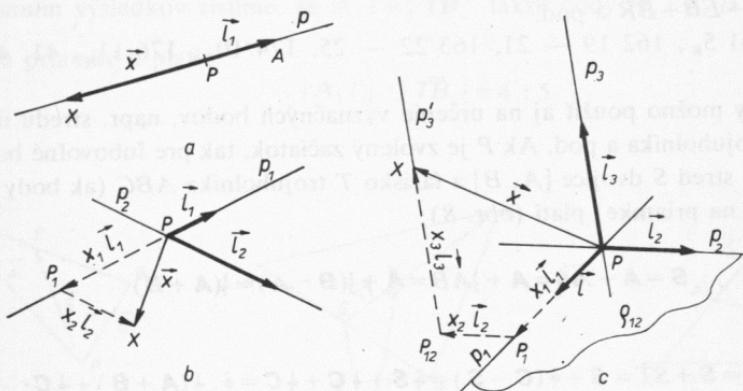
$$x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Usporiadanú dvojicu ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) (resp. trojicu ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$)) nezávislých vektorov nazývame bázou dvojrozmerného (resp. trojrozmerného) vektorového priestoru a čísla x_1, x_2 (resp. x_1, x_2, x_3), pre ktoré platí $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ (resp. $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$) nazývame súradnicami vektora \mathbf{x} v báze ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) (resp. ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$)). Tie sú bázou a vektorom \mathbf{x} jednoznačne určené. Poznamenajme, že dva (resp. tri) vektorové sú nezávislé, t. j. tvoria bázu dvojrozmerného (resp. trojrozmerného) vektorového priestoru práve vtedy, keď nie sú rovnobežné s tou istou priamkou (resp. rovinou).

Vyjadrovanie vektorov ako lineárnych kombinácií vektorovej bázy si ukážeme na príkladoch.

Príklad 14. Je daný kváder $ABCDEFGH$, kde $ABCD$ je podstava, $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$ a S je stred steny $BCGF$. Vektor $\mathbf{x} = \vec{SH}$ vyjadrite ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = \vec{AB}$, $\mathbf{b} = \vec{BC}$, $\mathbf{c} = \vec{AE}$.

(Výsledok: $-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$)



Obr. 6

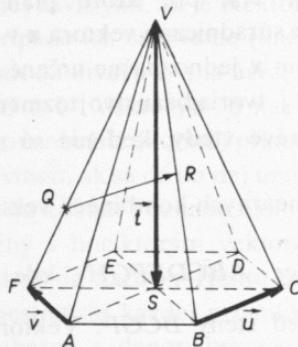
Príklad 15. V pravidelnom šesťbokom ihlane $ABCDEFV$ s vrcholom V a stredom podstavy S je R stred hrany BV a Q leží na hrane FV , pričom $|FQ| : |QV| = 2 : 5$. Vyjadrite vektor \vec{QR} pomocou vektorov $\mathbf{u} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$, $\mathbf{v} = \mathbf{F} - \mathbf{A}$, $\mathbf{t} = \mathbf{S} - \mathbf{V}$.

Riešenie. (Pozri obr. 7.) Nachystáme si najprv \vec{FV} a \vec{VB} :

$$\vec{FV} = \vec{FA} + \vec{AS} + \vec{SV} = -\mathbf{v} + \mathbf{u} - \mathbf{t}, \quad \vec{VB} = \vec{VS} + \vec{SB} = \mathbf{t} - \mathbf{v}$$

Ďalej

$$\begin{aligned} \vec{QR} &= \vec{QV} + \vec{VR} = \frac{5}{7}\vec{FV} + \frac{1}{2}\vec{VB} = (-\mathbf{v} + \mathbf{u} - \mathbf{t}) + \frac{1}{2}(\mathbf{t} - \mathbf{v}) = \\ &= \frac{5}{7}\mathbf{u} - \frac{17}{14}\mathbf{v} - \frac{3}{14}\mathbf{t} \end{aligned}$$



Obr. 7

Poznámka. Kvôli precvičeniu možno ísť po inej ceste, napr. $\vec{QR} = \vec{QF} + \vec{FE} + \vec{EB} + \vec{BR}$ a pod.

[3]: 161 5_R, 162 19 — 21, 163/22 — 25, 174/10_R, 176/11_R, 41, 43, 44, 178/46.

Vektory možno použiť aj na určenie význačných bodov, napr. stredu úsečky, ľažiska trojuholníka a pod. Ak P je zvolený začiatok, tak pre ľubovoľné body A , B , C , pre stred S dvojice $[A, B]$ a ľažisko T trojuholníka ABC (ak body A , B , C neležia na priamke) platí (obr. 8):

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \vec{AS} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

Podobne

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{S} + \vec{ST} = \mathbf{S} + \frac{1}{3}(\mathbf{C} - \mathbf{S}) = \frac{2}{3}\mathbf{S} + \frac{1}{3}\mathbf{C} + \frac{1}{3}\mathbf{C} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{3}\mathbf{C}; \\ \mathbf{T} &= \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \end{aligned}$$

Pri popise do súradníc dostaneme:

$$x_S = \frac{1}{2} (x_A + x_B) ; \quad x_T = \frac{1}{3} (x_A + x_B + x_C)$$

a podobne pre y (prípadne z v E_3).

[3]: 172/38.

Pri dôkazových úlohách, kde treba overiť, že nejaké tri body ležia na priamke, použijeme fakt, že vektoru \mathbf{u} , \mathbf{v} sú rovnobežné práve vtedy, keď jeden je násobkom druhého (keď sú závislé).

Príklad 16. V trojuholníku ABC je T tažisko, A_1 leží na strane AC a B_1 na BC , pričom $|AA_1| : |A_1C| = 2 : 3$, $|BB_1| : |B_1C| = 1 : 3$. Dokážte, že body A_1 , B_1 , T ležia na tej istej priamke. V akom pomere delí bod T úsečku A_1B_1 ?

Riešenie. Vektoru $\mathbf{a} = \vec{AC}$, $\mathbf{b} = \vec{BC}$ nech tvoria bázu. Vyjadrite pomocou nich vektoru $\vec{A_1T}$ a $\vec{TB_1}$, aby sme zistili, či je niektorý z nich násobkom druhého (ak áno, sú rovnobežné, t. j. body A_1 , T , B_1 ležia na priamke, a súčasne zistíme pomer dĺžok $|AT_1|$, $|TB_1|$). Podľa údajov (obr. 9)

$$\vec{A_1C} = \frac{3}{5} \vec{AC} = \frac{3}{5} \mathbf{a} ; \quad \vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a} ;$$

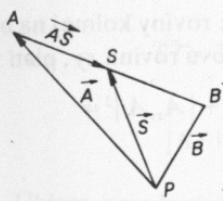
$$\vec{CT} = \frac{2}{3} \vec{CS} = \frac{2}{3} (\vec{CB} + \vec{BS}) = \frac{2}{3} (-\mathbf{b} + \frac{1}{2} \vec{BA}) = -\frac{2}{3} \mathbf{b} + \frac{1}{3} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\frac{1}{3} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \mathbf{a} ;$$

$$\vec{A_1T} = \vec{A_1C} + \vec{CT} = \frac{3}{5} \mathbf{a} + (-\frac{1}{3} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \mathbf{a}) = \frac{4}{15} \mathbf{a} - \frac{1}{3} \mathbf{b} ;$$

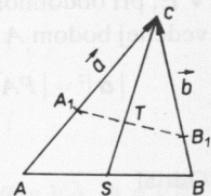
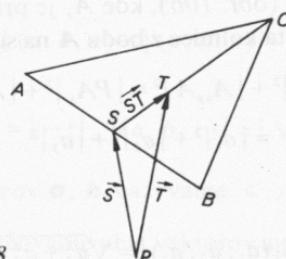
$$\vec{TB_1} = \vec{TC} + \vec{CB_1} = -\vec{CT} + \frac{3}{4} \vec{CB} = -(-\frac{1}{3} \mathbf{b} - \frac{1}{3} \mathbf{a}) + \frac{3}{4} (-\mathbf{b}) = \frac{1}{3} \mathbf{a} - \frac{5}{12} \mathbf{b} .$$

Porovnaním výsledkov zistíme, že $\vec{A_1T} = \frac{4}{5} \vec{TB_1}$, takže body A_1 , T , B_1 skutočne ležia na priamke a platí:

$$|A_1T| : |TB_1| = 4 : 5$$



Obr. 8



Obr. 9

Veľkosť vektora a skalárny súčin

Veľkosťou vektora $\alpha = \vec{PA}$ nazývame vzdialenosť $|PA|$ a označujeme ju $|\alpha|$ (alebo $|\vec{PA}|$).

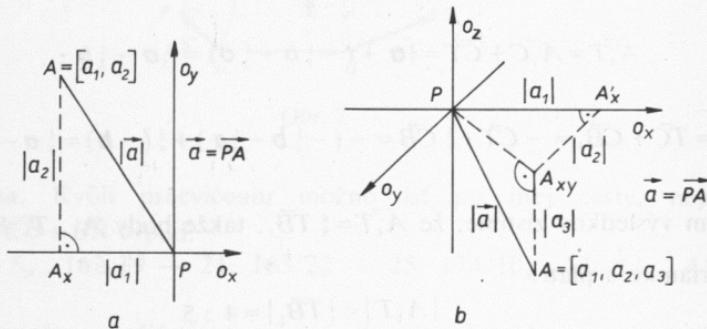
Ovodíme vzorec na výpočet veľkosti vektora daného súradnicami v pravouhlom súradnicovom systéme s rovnakými jednotkami dĺžky na osiach — v tzv. ortonormálnom systéme. (Toto obmedzenie nebolo v našich doterajších úvahách potrebné — boli správne aj pre kosouhlé súradnicové sústavy s rozličnými jednotkami dĺžky na osiach.)

Nech P je začiatok, $\alpha = \vec{PA}$, $A = [a_1, a_2]$, t. j. $A = (a_1, a_2)$ a A_x je päta kolmice na o_x vedenej bodom A (obr. 10a). Potom podľa Pytagorovej vety platí:

$$|\alpha|^2 = |PA|^2 = |\vec{PA}_x|^2 + |A_x A|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

(platí to aj pre $a_1 = 0$ alebo $a_2 = 0$), teda

$$|\alpha| = |(a_1, a_2)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



Obr. 10

V E_3 pri obdobnom označení (obr. 10b), kde A_x je priesečník roviny kolmej na o_x , vedenej bodom A a A_{xy} je päta kolmice z bodu A na súradnicovú rovinu xy , platí:

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= |PA|^2 = |\vec{PA}_{xy}|^2 + |A_{xy} A|^2 = |\vec{PA}_x|^2 + |A_x A_{xy}|^2 + |A_{xy} A|^2 = \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$|\alpha| = |(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Pre veľkosť násobku vektora (napr. v E_2) platí:

$$\begin{aligned} |k\mathbf{a}| &= |k(a_1, a_2)| = |(ka_1, ka_2)| = \sqrt{k^2a_1^2 + k^2a_2^2} = \\ &= |k| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned}$$

Dostaneme teda vzťah

$$|k\mathbf{a}| = |k| \cdot |\mathbf{a}|$$

ktorý platí pre ľubovoľné číslo k a vektor \mathbf{a} v E_n .

Zo vzorcov pre veľkosť vektora dostaneme aj vzorec pre vzdialenosť dvoch bodov v ortonormálnom súradnicovom systéme: Nech

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2], \quad \mathbf{B} = [b_1, b_2].$$

Potom

$$|\mathbf{AB}| = |\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = |\mathbf{B} - \mathbf{A}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)|$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Podobne v E_3

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Príklad 17. Vypočítajte vzdialenosť stredu S kvádra $ABCDA'B'C'D'$ (s obvyklým usporiadaním vrcholov) od fažiska T trojuholníka ACD' , keď $|\mathbf{AB}| = a$, $|\mathbf{BC}| = b$, $|\mathbf{CC}'| = c$.

Riešenie. Umiestime kváder do súradnicového systému tak, aby polpriamky DC , DA , DD' v tomto poradí predstavovali kladné polpriamky súradnicových osí. Potom $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{B}' = \frac{1}{2}(a, b, c)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{C} + \mathbf{D}') = \frac{1}{3}((0, b, 0) + (a, 0, 0) + (0, 0, c)) = \\ &= \frac{1}{3}(a, b, c); \end{aligned}$$

$$\mathbf{ST} = \mathbf{T} - \mathbf{S} = \frac{1}{3}(a, b, c) - \frac{1}{2}(a, b, c) = -\frac{1}{6}(a, b, c);$$

$$|\mathbf{ST}| = |\overrightarrow{\mathbf{ST}}| = \left| -\frac{1}{6} \right| \cdot |(a, b, c)| = \frac{1}{6} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Uhlom nenulových vektorov \mathbf{a} , \mathbf{b} nazývame $\measuredangle AVB$, kde $\mathbf{a} = \overrightarrow{VA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{VB}$; označíme ho $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Na určovanie uhla vektorov a posudzovanie ich kolmosti sa

používa tzv. skalárny súčin vektorov \mathbf{a} , \mathbf{b} , označovaný $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (alebo \mathbf{ab}) a definovaný pre $a, b \neq 0$ rovnosťou

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi, \text{ kde } \varphi = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Pre $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ alebo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ kladieme $\mathbf{ab} = \mathbf{0}$. Namiesto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ sa píše aj \mathbf{a}^2 (ale vyššie mocniny sa nedefinujú). Skalárny súčin dvoch vektorov je teda číslo!

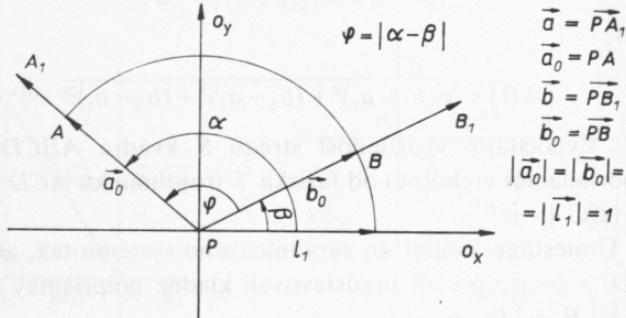
Skalárny súčin dvojrozmerných vektorov možno pomocou súradníc vyjadriť takto:

$$\mathbf{ab} = (a_1, a_2) (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Dôkaz. (Odvoláme sa na vzorec pre kosínus rozdielu, ktorý sa zatiaľ podľa gymnaziálnych osnov preberá po vektoroch; plánuje sa však ich úprava.) Pre $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (t.j. $a_1 = a_2 = 0$) alebo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ platí $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ a podľa definície aj $\mathbf{ab} = 0$. Pre $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi$ použijeme jednotkové vektorov (vektory s veľkosťou 1)

v smere i orientácii vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} . Budú to vektorov $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \overrightarrow{PA}$, $\mathbf{b}_0 = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b} =$

\overrightarrow{PB} (obr. 11), ktorých uhly s jednotkovým vektorom \mathbf{e}_1 umiesteným na osi o_x .



Obr. 11

označíme α, β . Kedže $A = \left[\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \right]$ a podľa definície goniometrických funkcií aj $A = [\cos \alpha, \sin \alpha]$ (a podobne pri bode B), platí:

$$\cos \varphi = \cos |\alpha - \beta| = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \frac{a_1}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{b_1}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{b_2}{|\mathbf{b}|}.$$

Odtiaľ podľa definície vyplýva dokazovaná rovnosť.

Pre trojrozmerné vektory platí:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Dôkaz je zložitejší (pozri [2]).

Príklad 18. Nech $A = [2, 0]$, $B = [-1, 3]$, $C = [1, c]$. Pri akom c je trojuholník ABC pravouhlý?

Riešenie. $\angle BAC = 90^\circ$ práve vtedy, keď $0 = (B - A) \cdot (C - A) = (-3, 3) \cdot (-1, c) = 3 + 3c$, teda keď $c = -1$. Podobne zistíme, že $\angle ABC = 90^\circ$ pre $c = 5$ a

$$\angle BCA = 90^\circ \text{ pre } c = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

[3]: $202/18 - 20, 205/21 - 23, 206/24a, b$.

Pre skalárny súčin platia niektoré pravidlá obdobné so vzorcami pre operácie s číslami, ale ďalšie sa neprenášajú:

Pre ľubovoľné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ v E_n a každé reálne číslo k platí:

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 ;$$

$$(\mathbf{ka})\mathbf{b} = k(\mathbf{ab}) ;$$

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} \pm \mathbf{bc} ; \quad (\text{distributívnosť})$$

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 \quad (\text{mocnina dvojčlena}).$$

(Zato však všeobecne neplatí ani $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$ ani $(\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$?) Na ukážku dokážeme vzorec pre mocninu dvojčlena (v E_2):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \\ &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + \\ &\quad + b_1^2 + b_2^2 = (a_1, a_2)(a_1, a_2) + 2(a_1, a_2)(b_1, b_2) + \\ &\quad + (b_1, b_2) + (b_1, b_2) = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 \end{aligned}$$

Príklad 19. Dokážte, že v rovnobežníku s dĺžkami strán a, b a dĺžkami uhlopriečok u, v platí $u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Riešenie. Nech $ABCD$ je rovnobežník, $\mathbf{a} = \vec{AB} = \vec{DC}$, $\mathbf{b} = \vec{BC} = \vec{AD}$, $\mathbf{u} = \vec{AC}$, $\mathbf{v} = \vec{BD}$. Potom pri označení $|\mathbf{a}| = a, \dots$ a použití pravidiel pre skalárny súčin dostaneme:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 + (\vec{BC} + \vec{CD})^2 = \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{a}^2 = \\ &= 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) = 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

LITERATÚRA

1. Gedeonová, E.: Vektory očami algebraika. Matematické obzory, 8 (1975), 11—31, Bratislava, ALFA 1975.
2. Medek, V.: Vektory očami geometra. Matematické obzory, 9 (1976), Bratislava, ALFA 1976.
3. Odvárko, O. a kol.: Zbierka úloh o reálciach, zobrazeniach a funkciách pre 2. ročník gymnázia. 1. vydanie. Bratislava, SPN 1972.
4. Odvárko, O. a kol.: Komentář pro učitele k používání učebnice matematiky pro SVVŠ ve II. ročníku gymnasií. 1. vydanie. Praha, SPN 1970.