RIEŠENIE JEDNÉHO TYPU GONIOMETRICKÝCH ROVNÍC

ANTON HNÁTH, Michalovce

Tento článok treba chápať ako metodickú poznámku k riešeniu goniometrických rovníc. Je užitočné upozorniť žiakov na to, aby pred riešením rovnice zistili, či nastala I. alebo II. možnosť, keď sa dá použiť nižšie popísaný postup.

V I. kapitole Zbierky úloh z matematiky pre 3. ročník gymnázia (SPN, Bratislava 1972) sa stretneme s touto úlohou:

Úloha 1. Nájdite všetky reálne x, pre ktoré platí

$$5\cos^3 x + 3\cos^2 x - \cos x = 15$$

Pri riešení tejto goniometrickej rovnice i pri riešení rovníc príbuzného typu môžeme použiť postup, ktorý teraz opíšeme.

Majme rovnicu

$$f(x) = g(x) \tag{*}$$

kde $f: y = f(x)$, $g: y = g(x)$ sú nejaké funkcie. Nech funkcie f, g nadobúdajú vo svojom definičnom obore globálne maximum, globálne minimum, alebo len jedno z nich. Predpokladajme, že funkcia f nadobúda globálne maximum a funkcia g má globálne minimum.

Označme $\max H(f) = f_{\max}$, $\min H(g) = g_{\min}$.

Rozoznajme tieto možnosti:

I. $f_{\max} < g_{\min}$.

Je zrejmé, že v tomto prípade rovnica (*) nemá riešenie. Tento záver máme aj v prípade $g_{\max} < f_{\min}$.

Príklad 1. V R riešte rovnicu: $4\sin^5 4x = 5 + \cos^4 3x$.

Riešenie. $f: y = 4\sin^5 4x$, $g: y = 5 + \cos^4 3x$, keďže $f_{\max} = 4$ a $g_{\min} = 5$, je $f_{\max} = 4 < 5 = g_{\min}$ a úloha nemá riešenie.

II. $f_{max}=g_{min}$.

Riešením rovnice (*) je v tomto prípade množina $K=\{x \in R : (f(x)=f_{max}) \wedge (g_{min}=g(x))\}$.

Množinu koreňov budeme ďalej označovať K_2.

Príklad 2. V R riešte rovnicu: $4x^2+x^4 = -\sin^2 5x$

Riešenie. $f: y = 4x^2+x^4$, $g: y=-\sin^2 5x$. Hneď vidieť, že $f_{min}=0$ a $g_{max}=0$.

Rovnice $4x^2+x^4=0$ má jediný reálny koreň $x=0$. Tento koreň spĺňa rovnicu $-\sin^2 5x=0$. Preto $K=\{0\}$.

Príklad 3. V R riešte rovnicu s neznámou x a parametrom $m>1$

$$\left(1-\frac{\sin^2(x-\pi)}{m}\right)\cdot\cos(x-\pi)=1$$

Riešenie.

$$f: y=\left(1-\frac{\sin^2(x-\pi)}{m}\right)\cos(x-\pi),\ g: y=1.$$

Ľahko zistíme, že $f_{max}=1$, $g_{min}=1$. $f(x) = f_{max} = 1$ práve vtedy, keď

$$\cos(x-\pi)=1 \wedge 1-\frac{\sin^2(x-\pi)}{m}=1$$

Riešením prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x_1=(2k_1+1)\pi,\ k_1 \in Z$$

Z druhej rovnice sústavy máme $\sin(x-\pi)=0$, teda

$$x_2=(k_2+1)\pi,\ k_2 \in Z$$

Z podmienky $x_1 = x_2$ vyplýva $k_2 = 2k_1$. Jednoducho overíme, že množina riešení danej rovnice je

$$K=\{x \in R : x=(2k+1)\pi,\ k \in Z\}$$

Príklad 4: V R riešte rovnicu:

$$3\sin 10x=3+\cos^2 2x$$

Riešenie:

$$f: y=3\sin 10x,\ g: y=3+\cos^2 2x$$

Funkcia f nadobudne maximum práve vtedy, keď $\sin 10x = 1$, potom $f_{\max} = 3$, $g_{\min} = 3$ (pre $\cos 2x = 0$).

Riešme sústavu rovníc:

$$\sin 10x = 1 \wedge \cos 2x = 0$$

$$\sin 10x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{20} + k_1 \frac{\pi}{5}, \quad k_1 \in Z$$

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + k_2 \frac{\pi}{2}, \quad k_2 \in Z$$

Podmienka $x_1 = x_2$ vedie k rovnici $10k_2 - 4k_1 + 4 = 0$. Riešením tejto rovnice v $Z \times Z$ je každá usporiadaná dvojica $[k_1; k_2]$, kde $k_2 = 2k$, $k \in Z$, $k_1 = \frac{5}{2} k_2 + 1$.

Skúškou overíme, že všetky riešenia danej goniometrickej rovnice tvoria množinu $K = \{x \in R : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in Z\}$.

III. $f_{\max} > g_{\min}$.

V tomto prípade nezistíme uvedeným spôsobom ani riešenie, ani jeho existenciu. Rovnako je tomu pri riešení rovníc uvedeného typu, ak zistíme len: $f_{\max} \lesseqgtr g_{\max}$, resp. $f_{\min} \lesseqgtr g_{\min}$.

Spomenutý postup má význam v prípadoch I a II. Vtedy poskytuje užitočný nástroj pre riešenie rovníc, ktoré by sme inak riešili veľmi ťažko, alebo zdĺhavo.

Cvičenia

1. Riešte úlohu 1.

2. V R riešte rovnice:

a) $\sin^{12} 2x = 1 + \cos^4 x$,

b) $\cos 2x \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 1$,

c) $\mathrm{tg}^2\, 2x + 2\sqrt{3}\, \mathrm{tg}\, 2x + 3 = -\mathrm{cotg}^2 \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$,

d) $\cos(2a + 1)x + \cos 2bx = -2$, kde $a, b \in Z$,

e) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^2 4x$.

Literatúra

Riečan, B — Franek, M. — Červenková, X.: Úlohy z matematiky pre 3. ročník gymnázia. Matematika v škole, *2*, 1969.