

RIEŠENIE JEDNÉHO TYPU GONIOMETRICKÝCH ROVNÍC

ANTON HNÁTH, Michalovce

Tento článok treba chápať ako metodickú poznámku k riešeniu goniometrických rovníc. Je užitočné upozorniť žiakov na to, aby pred riešením rovnice zistili, či nastala I. alebo II. možnosť, keď sa dá použiť nižšie popísaný postup.

V I. kapitole Zbierky úloh z matematiky pre 3. ročník gymnázia (SPN, Bratislava 1972) sa stretneme s touto úlohou:

Úloha 1. Nájdite všetky reálne x , pre ktoré platí

$$5 \cos^3 x + 3 \cos^2 x - \cos x = 15$$

Pri riešení tejto goniometrickej rovnice i pri riešení rovníc príbuzného typu môžeme použiť postup, ktorý teraz opíšeme.

Majme rovnicu

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

kde $f: y = f(x)$, $g: y = g(x)$ sú nejaké funkcie. Nech funkcie f , g nadobúdajú vo svojom definičnom obore globálne maximum, globálne minimum, alebo len jedno z nich. Predpokladajme, že funkcia f nadobúda globálne maximum a funkcia g má globálne minimum.

Označme $\max H(f) = f_{\max}$, $\min H(g) = g_{\min}$.

Rozoznajme tieto možnosti:

I. $f_{\max} < g_{\min}$.

Je zrejmé, že v tomto prípade rovnica (*) nemá riešenie. Tento záver máme aj v prípade $g_{\max} < f_{\min}$.

Príklad 1. V R riešte rovnicu: $4 \sin^5 4x = 5 + \cos^4 3x$.

Riešenie. $f: y = 4 \sin^5 4x$, $g: y = 5 + \cos^4 3x$, keďže $f_{\max} = 4$ a $g_{\min} = 5$, je $f_{\max} = 4 < 5 = g_{\min}$ a úloha nemá riešenie.

$$\text{II. } f_{\max} = g_{\min}.$$

Riešením rovnice (*) je v tomto prípade množina $K = \{x \in R : (f(x) = f_{\max}) \wedge (g_{\min} = g(x))\}$.

Množinu koreňov budeme ďalej označovať K_2 .

Príklad 2. V R riešte rovnicu: $4x^2 + x^4 = -\sin^2 5x$

Riešenie. $f: y = 4x^2 + x^4$, $g: y = -\sin^2 5x$. Hned' vidieť, že $f_{\min} = 0$ a $g_{\max} = 0$.

Rovnice $4x^2 + x^4 = 0$ má jediný reálny koreň $x = 0$. Tento koreň splňa rovinu $-\sin^2 5x = 0$. Preto $K = \{0\}$.

Príklad 3. V R riešte rovnicu s neznámou x a parametrom $m > 1$

$$\left(1 - \frac{\sin^2(x - \pi)}{m}\right) \cdot \cos(x - \pi) = 1$$

Riešenie.

$$f: y = \left(1 - \frac{\sin^2(x - \pi)}{m}\right) \cos(x - \pi), g: y = 1.$$

Lahko zistíme, že $f_{\max} = 1$, $g_{\min} = 1$. $f(x) = f_{\max} = 1$ práve vtedy, keď

$$\cos(x - \pi) = 1 \wedge 1 - \frac{\sin^2(x - \pi)}{m} = 1$$

Riešením prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x_1 = (2k_1 + 1)\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

Z druhej rovnice sústavy máme $\sin(x - \pi) = 0$, teda

$$x_2 = (k_2 + 1)\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Z podmienky $x_1 = x_2$ vyplýva $k_2 = 2k_1$. Jednoducho overíme, že množina riešení danej rovnice je

$$K = \{x \in R : x = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Príklad 4: V R riešte rovnicu:

$$3 \sin 10x = 3 + \cos^2 2x$$

Riešenie:

$$f: y = 3 \sin 10x, \quad g: y = 3 + \cos^2 2x$$

Funkcia f nadobudne maximum práve vtedy, keď $\sin 10x = 1$, potom $f_{\max} = 3$, $g_{\min} = 3$ (pre $\cos 2x = 0$).

Riešme sústavu rovníc:

$$\sin 10x = 1 \wedge \cos 2x = 0$$

$$\sin 10x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{20} + k_1 \frac{\pi}{5}, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + k_2 \frac{\pi}{2}, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Podmienka $x_1 = x_2$ vedie k rovnici $10k_2 - 4k_1 + 4 = 0$. Riešením tejto rovnice v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je každá usporiadaná dvojica $[k_1; k_2]$, kde $k_2 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k_1 = \frac{5}{2}k_2 + 1$.

Skúškou overíme, že všetky riešenia danej goniometrickej rovnice tvoria množinu $K = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

III. $f_{\max} > g_{\min}$.

V tomto prípade nezistíme uvedeným spôsobom ani riešenie, ani jeho existenciu. Rovnako je tomu pri riešení rovníc uvedeného typu, ak zistíme len: $f_{\max} \leq g_{\max}$, resp. $f_{\min} \leq g_{\min}$.

Spomenutý postup má význam v prípadoch I a II. Vtedy poskytuje užitočný nástroj pre riešenie rovníc, ktoré by sme inak riešili veľmi ťažko, alebo zdĺhavo.

Cvičenia

1. Riešte úlohu 1.

2. V R riešte rovnice:

a) $\sin^{12} 2x = 1 + \cos^4 x$,

b) $\cos 2x \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right) = 1$,

c) $\operatorname{tg}^2 2x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{cotg}^2 \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$,

d) $\cos(2a+1)x + \cos 2bx = -2$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$,

e) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^2 4x$.

Literatúra

Riečan, B — Franek, M. — Červenková, X.: Úlohy z matematiky pre 3. ročník gymnázia. Matematika v škole, 2, 1969.

$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot \frac{B_i}{C_i} + \frac{D_i}{C_i} = x \Leftrightarrow 1 = \text{cislo}$$

Príklad 3. Vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ má jedny reálny koeficienty x_1, x_2, x_3 tak, že $\vec{A} = x_1 \vec{B}_1 + x_2 \vec{B}_2 + x_3 \vec{B}_3$, kde $\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektor \vec{A} následovne je daný ako $\vec{A} = x_1 \vec{B}_1 + x_2 \vec{B}_2 + x_3 \vec{B}_3$. Vektor \vec{A} má minimálnu hodnotu 0. $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10$. Vektory $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ sú vektori vektorového priestoru \mathbb{R}^3 .

Riešenie:

Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$.

$$(\sum_{i=1}^n A_i \cdot \frac{B_i}{C_i} + \frac{D_i}{C_i}) = x_1 \cdot B_1 + x_2 \cdot B_2 + x_3 \cdot B_3$$

Správne je $\vec{A} = x_1 \vec{B}_1 + x_2 \vec{B}_2 + x_3 \vec{B}_3$. Vektor \vec{A} má minimálnu hodnotu 0. Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$.

Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$. Vektor \vec{A} má minimálnu hodnotu 0. Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$.

Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$. Vektor \vec{A} má minimálnu hodnotu 0. Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$.

Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$. Vektor \vec{A} má minimálnu hodnotu 0. Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$.

Z podmienky x_1, x_2, x_3 vypísaveme $x_1 = 10 - x_2 - x_3$. Vektor \vec{A} je daný ako $\vec{A} = x_1 \vec{B}_1 + x_2 \vec{B}_2 + x_3 \vec{B}_3$. Vektor \vec{A} má minimálnu hodnotu 0. Minimálna hodnota vektoru \vec{A} je daná sumou vektorov $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$.

$$K = \vec{A} = K \cdot \vec{B}_1 + (K - K) \cdot \vec{B}_2 + (K - K) \cdot \vec{B}_3$$

Príklad 4. Vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ má reálne koeficienty x_1, x_2, x_3 tak, že $\vec{A} = x_1 \vec{B}_1 + x_2 \vec{B}_2 + x_3 \vec{B}_3$, kde $\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$x_1 \vec{B}_1 + x_2 \vec{B}_2 + x_3 \vec{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 1 \quad | \cdot 1 \quad x_1 = 1$$

$$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 = 2 \quad | \cdot 1 \quad x_2 = 2$$

$$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = 3 \quad | \cdot 1 \quad x_3 = 3$$