

# ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

OTAKAR GROŠEK—PETER HORÁK, Bratislava

V niekoľkých nasledujúcich článkoch Vám chceme navrhnúť jedno z mnohých riešení ako oživiť hodinu matematiky. Vychádzame pritom hlavne z našich skúseností pri práci v rôznych matematických krúžkoch, v pionierskych táboroch, ale i priamo pri vyučovacom procese.

Podľa týchto skúseností veľmi vďačnou témou je krátka *súťažno-zábavná hra* pochopiteľne s matematickým pozadím. Túto skutočnosť žiakom síce spomenieme ale nekladíme na ňu dôraz. Žiaci to veľmi rýchle pochopia sami a začnú klásť otázky — a tento moment je najvhodnejší na to, aby učiteľ poukázal aj na iných príkladoch zo života *načo je matematika dobrá* a vzbudil tak záujem u detí o tento predmet.

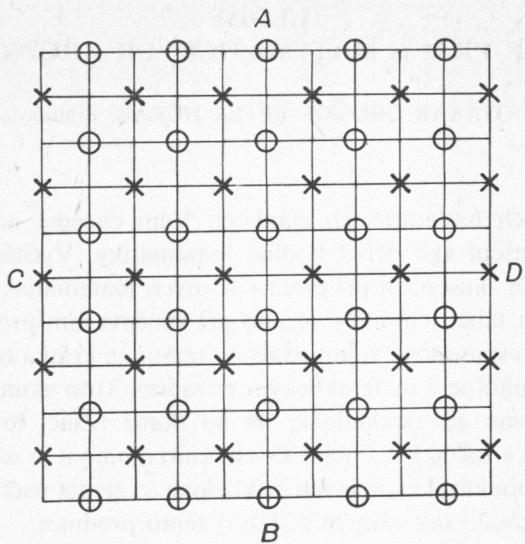
Načo je matematika dobrá — to by bola druhá téma, ktorej by sme sa chceli venovať. V tomto prípade by sme radi reagovali aj na Vaše podnety. Iste nám dáte za pravdu, že to je téma, ktorej sme pri výuke matematiky veľa dlžní. Žiak musí byť v prvom rade vnútorne presvedčený, že mu to bude na niečo dobré ak sa bude učiť matematiku.

A ešte jedna poznámka. Keď sa rozhodnete obetovať vyučovaciu hodinu tejto hre, rozhodne sa do nej zapojte aj Vy ako člen niektorého družstva.

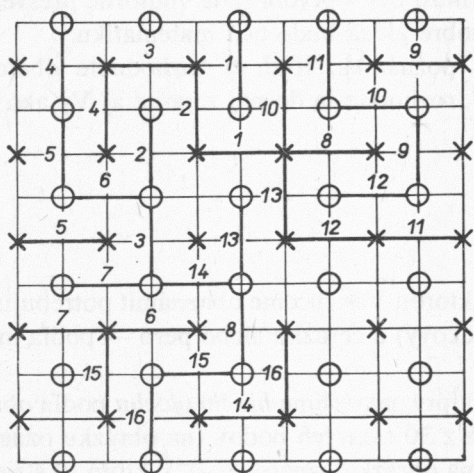
## 1

K prvej hre, s ktorou Vás chceme oboznámiť potrebujú žiaci len papier (najlepšie štvorcový) a ceruzku alebo pero — podľa možnosti rôznych farieb.

Na papieri si najprv nakreslíme *hraciu plochu* podľa *obr. 1*. Táto hracia plocha pozostáva z 30 tmavých bodov (na obrázku označené „X“) a 30 svetlých bodov (na obrázku označené „0“), ktoré sú striedavo umiestnené. Pod *tahom* v tejto hre rozumieme nakreslenie úsečky, ktorá spája dva svetlé resp. tmavé body. Pritom sa tieto úsečky nesmú pretínať.



Obr. 1



Obr. 2

Hráči sa dohodnú na svojich farbách a kto z nich začne kresliť ako prvý. Potom striedavo kreslia na hracej ploche svoje ťahy. Úloha hráča, ktorému patria svetlé body, je postupne nakresliť lomenú čiaru zo strany *A* na stranu *B* a úloha hráča, ktorému patria tmavé body zasa je nakresliť takúto čiaru zo strany *C* na stranu *D*.

Vyhráva ten, komu sa podarí ako prvému takúto čiaru nakresliť. Jedna z týchto hier je na *obr. 2*, kde je vyznačené aj poradie ťahov. Napríklad

$0 \rightarrow 0$  resp.  $X \rightarrow X$  označuje tretí ťah príslušného hráča. Na *obr. 2* je

zakreslených 16 ťahov oboch hráčov. Ak sa pozorne na ne pozriete, zistíte, že partiu vyhral hráč, ktorému patrili svetlé body. Jeho víťazná lomená čiaru pozostáva z týchto ťahov: 4, 5, 6, 3, 14, 8, 15, 16.

Aby hra bola spravodlivejšia, je nutné sa dohodnúť na tom, že hráči zohrajú dva zápasy a v každom má právo prvého ťahu iný hráč.

Na záver uvedieme niekoľko poznámok k tejto hre.

1. V tejto hre nie je známa víťazná stratégia, ale dá sa dokázať, že hráč, ktorý má právo prvého ťahu pri správnej hre (ktorú žiaľ nevieme priamo opísať) musí vyhrať.

2. Je zrejmé, že hraciu plochu si môžeme nakresliť ľubovoľne veľkú, nielen 30 svetlých a 30 tmavých bodov. Dôležité je, aby minimálny počet ťahov zo strany *A* na stranu *B* bol ten istý, ako zo strany *C* na stranu *D*.

3. Táto hra nemôže skončiť remízou. Dá sa dokonca dokázať, že ak už niektorý z hráčov nemá ťah, potom je už určite na hracej ploche nakreslená víťazná lomená čiaru jedného z hráčov.

4. Hru možno ľubovoľne motivovať. Napríklad ako prechod cez zamorené územie. Na hracej ploche je zakreslená oblasť, ktorú postupne „zamorujú“ dve nepriateľské armády. Každý ťah znamená zamorenie príslušného úseku medzi dvoma stanovišťami a znemožňuje nepriateľovi prechod medzi týmito dvomi stanovišťami. Vyhráva samozrejme ten, kto sa ako prvý dostane na druhú stranu. Iná možnosť motivácie je prechod cez zamínované pole, atď.

Aj v tomto smere možno zaangažovať žiakov. Je to pre nich podľa našich skúseností veľmi vďačná téma.

K tejto hre v jej základnej polohe nepotrebujú žiaci žiadne pomôcky a je veľmi jednoduchá. Samotná hra *aritmomachia* bola pred rokmi veľmi obľúbená a rozšírená. Už v roku 1624 ju opísal Bachet de Mézirac v rôznych obmenách.

Uvedme najprv jej najjednoduchšie znenie, keď sa hrou bavia dvaja hráči *A* a *B*. Hráč *A* si zvolí ľubovoľne jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 a hráč *B* urobí podobnú voľbu a zvolené číslo pripočíta k číslu, ktoré povedal hráč *A*; potom pokračuje znova hráč *A*. Takto sa obaja hráči striedajú. Zvíťazí ten, kto prvý dôjde k vopred stanovenému číslu — napríklad 100.

V tejto hre, tak ako sme ju opísali, existuje víťazná stratégia pre jedného z hráčov. Uvidíte, že žiaci po dvoch-troch odohraných hrách túto stratégiu nájdu.

Stručne opíšeme, ako si hráč *A* má počínať. Zrejme hráč, ktorý dosiahne číslo 93 ( $= 100 - 7$ ) si zabezpečil výhru. Jeho súper *B* totiž pripočítaním ľubovoľného čísla (z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6) nedosiahne stanovené číslo 100 a zároveň umožní hráčovi *A* toto číslo dosiahnuť. Podobne ten, kto si zabezpečí číslo 86 ( $= 100 - 2 \cdot 7$ ) berie súperovi možnosť dosiahnuť číslo 93. V tejto úvahe môžeme pokračovať ďalej. Vidieť, že k zabezpečeniu výhry stačí postupne obsadzovať čísla 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65, 72, 79, 86, 93. Tieto čísla môžeme nazvať *strategickými*.

Ako si má teda počínať hráč *A*, aby vyhral? Hráč *A*, ktorý má právo prvej voľby, povie číslo 2. Jeho súper *B* pripočítaním jedného z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 (napríklad 4) dosiahne jedno z čísel 3, 4, 5, 6, 7, 8 (v našom príklade  $2 + 4 = 6$ ). Hráč *A*, ktorý začínal, potom pripočíta to z čísel 1–6, ktorým dosiahne druhé strategické číslo — 9 (v našom príklade pripočíta 3, lebo  $6 + 3 = 9$ ). Ak takto postupuje prvý hráč, obsadí postupne všetky strategické čísla a víťazstvo mu zrejme nemôže ujsť.

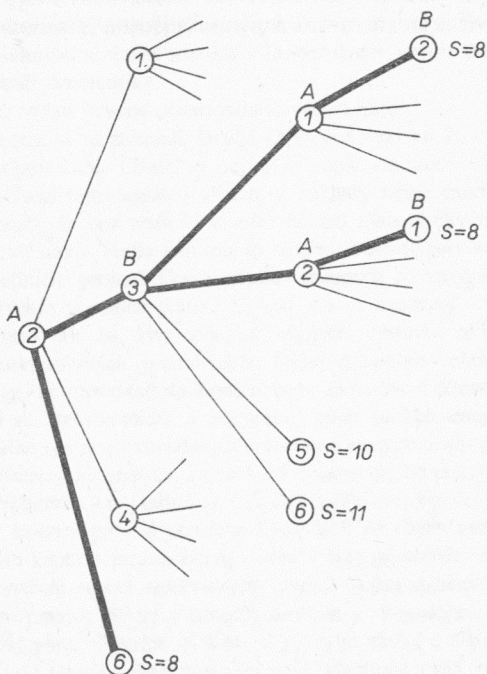
Toto je najbežnejšia forma hry aritmomachie. Môžete si však prepočítať aj iné varianty, t. j. voliť jedno z čísel 1, 2, 3, ...,  $n$  (u nás  $n = 6$ ) a hrať do súčtu  $S$  (v našom príklade  $S = 100$ ). Všetky strategické čísla pre jedného z hráčov dostanete, ak budete od čísla  $S$  postupne odčítovať násobky čísla  $(n + 1)$  — u nás  $6 + 1 = 7$ . (V akom vzťahu musia byť čísla  $S$  a  $n$ , aby vyhral hráč *B*, ktorý má právo druhej voľby?)

Aritmomachia sa stane zaujímavejšou, ak budeme hrať jednu jej variantu — tzv. aritmomachie s kockou.

Ako už názov hovorí, žiaci k nej potrebujú *hraciu kocku*. Pod hracou kockou rozumieme tzv. pravú kocku, ktorej súčet bodov na protifaľných stenách je 7. Opíšeme stručne spôsob hry, ak hráči hrajú do súčtu 8.

Oproti hre v základnej polohe treba dodať toto pravidlo: Hráč, ktorý pripočítaním svojho čísla prekročí konečné číslo — u nás 8, prehráva.

Hráč A, ktorý začína určí svoje prvé číslo tým, že hodí kocku. Číslo, ktoré mu padne, je jeho prvá voľba. Napríklad mu padlo číslo 2. Ďalej sa už kocka nehádza, ale len preklápa na jednu zo susedných stien. Druhý hráč B môže voliť a pripočítať už iba to číslo, ktoré dosiahne preklopením kocky na jednu z bočných stien. V našom príklade len jedno z čísel 1, 3, 4, 6. Svoju voľbu potvrdí tým, že kocku preklopí tak, aby zvolené číslo bolo na vrchnej stene. Ak si hráč B zvolí v našom príklade číslo 6, vyhráva



Obr. 3

okamžite. Vyhráva ale tiež, keď si zvolí číslo 3. Súčet bude totiž  $2 + 3 = 5$  a hráč *A* môže — po preklopení — voliť len jedno z čísel 1, 2, 5, 6. Ak si zvolí 5 alebo 6, prehráva okamžite, lebo súčet bude väčší ako 8. Ak preklopí kocku na stenu s číslom 1, súčet bude  $2 + 3 + 1 = 6$  a hráč *B* potom preklopí kocku na číslo 2. Ak si zvolí 2, súčet bude  $2 + 3 + 2 = 7$  a hráč *B* preklopí kocku na číslo 1.

Je zrejmé, že padnutím prvého čísla je jednoznačne určená víťazná stratégia pre jedného z hráčov. Pre tak malé konečné číslo, ako tomu bolo v našom príklade — 8 je možné prebrať všetky možnosti. Najlepšie pomocou tzv. *stromu logických možností*, ktorý sa žiaci učia už v 6. resp. 7. triede ZDŠ (pozri obr. 3). Ak si však zvolíme konečné číslo veľké — napríklad 1000, je nakreslenie stromu logických možností prakticky nemožné.

Napriek tomu, ako sme už poznamenali, víťazná stratégia pre jedného z hráčov vždy existuje, aj keď ju nevieme priamo opísať. A tým, že nie je dopredu známy víťaz sa stáva hra zaujímavejšou a napínavejšou pre oboch súperov.