ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Štefan Znám, 816 31 Bratislava, Mlynská dolina. Riešenia úloh uvedených v tomto čísle pošlite na adresu vedúceho rubriky do 31. XII. 1974.

B.27 = Problém 1 z článku M. Hejný, *Metrické geometrie I* (v tomto čísle, str. 35—48).
B.28 = Problém 2 (tamže).
B.29 = Problém 3 (tamže).
B.30 = Problém 4 (tamže).
B.31 = Problém 5 (tamže).
B.32 = Problém 6 (tamže).

Riešenie niektorých úloh z tretieho zväzku Matematických obzorov:

Riešenie úlohy *B.9* (Michal Zajac).
Pre $(y) = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$

$$(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad \beta_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

definujme

$$M_t(y, \beta) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^t\Big)^{\frac{1}{t}}.$$

Ak $\min\limits_{i=1,\ldots,n} y_i = y_s$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} y_i = y_k$, tak pre $t \neq 0$, platí

$$(+)\; y_s = \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_s^t\Big)^{\frac{1}{t}} \leqq \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^t\Big)^{\frac{1}{t}} \leqq y_k.$$

Pomocou L'Hospitalovho pravidla máme

$$\lim_{t\to 0} \ln M_t(y, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln y_i = \ln \prod_{i=1}^{n} y_i^{\beta_i},$$

čiže

$$\lim_{t\to 0} M_t(y, \beta) = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\beta_i}.$$

Ak prejdeme v (+) k limitám, dostaneme

$$\min(y) \leqq \prod_{i=1}^{n} y_i^{\beta_i} \leqq \max(y)$$

a odtiaľ po dosadení $y_i = \sqrt[\alpha_i]{x_i}$, $n = k$, $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i}$

dostaneme dokazované nerovnosti.

Riešenie úlohy *B.10* (Anton Hnáth).

Ak n je jednociferné číslo, tak tvrdenie je zrejmé. Teraz dokážeme pomocné tvrdenie: ak $r > 1$, tak $a_r \cdot 10^r + \ldots + a_0 > a_r + \ldots + a_0$. Skutočne: $10^r > 1$, a tak $a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \ldots + a_0 > a_r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \ldots + a_0 \geqq a_r + a_{r-1} + \ldots + a_0$. Platí teda $f_0(n) > f_1(n)$. Ak $f_1(n)$ je aspoň dvojciferné číslo, podobne ako vyššie sa dá dokázať vzťah

$$f_1(n) > f_2(n)$$

Takto budeme postupovať potiaľ, kým v postupnosti

$$f_0(n), f_1(n), f_2(n), \ldots$$

nedospejeme k jednocifernému číslu $f_k(n)$. Potom pre všetky prirodzené i je už $f_{k+i}(n) = f_k(n)$, a tým je dôkaz ukončený.

Riešenie úlohy *B.14* (Michal Zajac).

Označme $X_i = x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že platí

$$A = \frac{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

Predpokladajme, že A je celé číslo, a pritom existujú také čísla r a s, $1 \leqq r < s \leqq n$, že pre x_r a x_s platí $(x_r, x_s) = d > 1$ (teda sú súdeliteľné).

Potom $d \mid \prod_{i=1}^{n} x_i$, $\prod_{i=1}^{n} x_i \mid 1 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, a teda $d \mid 1 + \sum_{i=1}^{n} X_i$; $d \mid X_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, a teda $d \mid \sum_{i=1}^{n} X_i$ (pričom symbol $a \mid b$ znamená, že a je deliteľom čísla b).

Prirodzené čísla Y a $Y + 1$ sú nesúdeliteľné, a tak sme dostali spor, ktorý dokazuje tvrdenie.

Poznámka. Redakcia dostáva pomerne málo riešení úloh uverejnených v tejto rubrike. Obraciame sa preto na našich čitateľov, aby nám napísali, či úlohy sú príliš náročné, alebo poznámky o vhodnosti zamerania úloh.

Poznámky k problémom z 5. čísla Matematických obzorov

Čitatelia nás upozornili, že v úlohe *B 22* by bolo vhodné na pravej strane implikácie namiesto „m je prvočíslo“ písať „m nie je číslo zložené“. V pôvodnom znení je totiž úloha triviálne riešiteľná.

Správne riešenia problémov z 5. čísla Matematických obzorov:

Dr. Miloš Franek, Gymnázium Prievidza: *B 21, B 22, B 23, B 24, B 26.*

Pavol Valent, ZDŠ Žemberovce: *B 21, B 22.*

Anton Hnáth, Gymnázium Michalovce: *B 21, B 22.*