

ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Štefan Znáam, Katedra algebry a teórie čísel PFUK, matematický pavilón, Mlynská dolina, Bratislava

Táto rubrika je určená čitateľom s vyššou matematickou erudíciou (absolventom vysokých škôl, prípadne poslucháčom vyšších ročníkov). Úlohy majú slúžiť precvičovaniu a osviežovaniu vedomostí riešiteľov. Prosíme čitateľov, aby nám posielali riešenia uvedených problémov. Mená riešiteľov, ako aj najvtipnejšie riešenia, budeme uverejňovať v tejto rubrike.

Riešenia úloh tohto čísla pošlite do 31. I. 73 na adresu vedúceho rubriky.

B. 1. Určite všetky dvojice prirodzených čísel (x, y) pre ktoré sú čísla $\frac{x+2}{y}$ a $\frac{y+2}{x}$ celé.

P. Kostyrko

B. 2. Nech a, b, c sú kladné čísla, pre ktoré platí

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dokážte, že pre $e > 2$ platí

$$a^e + b^e < c^e$$

P. Kostyrko

B. 3. Nájdite všetky spojité reálne funkcie f definované na intervale $(1, \infty)$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

pre všetky $x, y \in (1, \infty)$.

J. Smítal

B. 4. Nájdite všetky reálne funkcie f definované na intervale $(1, \infty)$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{xy}$$

pre všetky $x, y \in (1, \infty)$.

J. Smítal

B. 5. Dokážte, že číslo $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ nie je koreňom nijakej algebraickej rovnice s kladnými celočíselnými koeficientami.

I. Korec

B. 6. Nech a, b, c, d, e, f sú kladné reálne čísla. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby existoval štvorsten $ABCD$ taký, že dĺžky jeho strán BC, AC, AB, AD, CD po rade sú a, b, c, d, e, f .

I. Korec

B. 7. Do pravidelného dvanáststena je vpísaná guľová plocha, ktorá má polomer 1. Určte polomer guľovej plochy, ktorá sa dotýka troch stien dvanáststena a spomínanej guľovej plochy vpísanej do dvanáststena.

I. Korec

B. 8. Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú polynómy s celočíselnými koeficientami; stupeň polynómu $f(x)$ je 3, stupeň polynómu $g(x)$ je 4. Ak polynómy $f(x)$ a $g(x)$ majú spoločný koreň, potom aspoň jeden z nich má aspoň jeden racionálny koreň. Dokážte.

Platí obdobné tvrdenie aj pre polynómy stupňov 4 a 5?

I. Korec